# 解ける量子力学模型と直交多項式

小竹　悟
信州大学学術研究院理工学域理学系

調和振動子の量子力学ではエルミート多項式，水素原子の量子力学ではラゲール多項式という具合に，直交多項式は量子力学の問題を扱う際に頻繁に現れる欠かせない存在である．これら直交多項式は数学者によって詳しく調べられてきた．物理学にとって大切な2階微分方程式を満たす直交多項式はエルミート，ラゲール，ヤコビ多項式に限られる事が古くから知られており，2階差分方程式を満たす直交多項式も($q$-)超幾何直交多項式のアスキースキームとして1980年代にまとめられている．このように書くともう何も研究する事が無いように思われるかもしれないが，中々どうして最近もまだ進展があり，その内の2つ，生成消滅演算子の自然な構成と，新しい種類の直交多項式について解説する．この発見の原動力となったのが解ける量子力学模型によるアプローチで，その利点は量子力学の研究で培われた知識・手法を用いる事ができる点である．また，直交多項式の性質に統一的な視点を与える事もできた．例えば，アスキースキームの直交多項式が満たしている前方・後方ずらし関係式は個別に述べられているだけであったが，量子力学の観点からは模型の形状不変性の帰結として統一的に理解できる．

解ける量子力学模型の生成消滅演算子に関する研究は色々と行われてきたが，それらは具体的な微分演算子としてではなく形式的な演算子に過ぎなかった．前方・後方ずらし関係式はパラメータをずらしてしまうので，調和振動子以外では生成消滅演算子とは別物である．調和振動子の生成消滅演算子が座標のハイゼンベルク解の負・正振動数部分の係数として得られていたのを真似て，アスキースキームの直交多項式が固有関数に現れる量子力学模型に対して生成消滅演算子を微分演算子（差分演算子）として自然な形で構成する事が2006年にできた．これには，閉関係式と名付けられた性質を用いて，正弦的座標と呼ばれる特別な座標のハイゼンベルク解が厳密に求められる事が利用された．

通常の直交多項式は全ての次数が揃っている事から完全系をなしているが，次数に欠落があるにも拘らず完全系をなしているものが新しい種類の直交多項式である．2階微分方程式を満たす（通常の）直交多項式はエルミート，ラゲール，ヤコビ多項式に限られるという定理を逃れる試みとして，微分方程式を差分方程式に変更する事でアスキースキームの直交多項式が得られていたが，多項式の次数を見直すという新しい方向への変更である．0次式が存在せず1次式から始まるが完全系をなす最初の例が2008年に与えられ，例外直交多項式と名付けられた．新しい種類の直交多項式を固有関数として持つ解ける量子力学模型を形状不変性や他の手法を用いて構成する事により，新しい種類の直交多項式が無限に多く得られ，多添字直交多項式と名付けられた．この新しい種類の直交多項式の発見は，多少大げさかもしれないが，エルミート・ラゲール・ヤコビ以来の大きな進展と言えよう．差分方程式を満たす直交多項式に対しても多添字直交多項式を構成する事ができ，これらの構成において量子力学的定式化がおおいに役立った．直交多項式に新たな分野を切り開いたこれらの新しい多項式は現在活発に研究が行われている．

—*Keywords*—

**解ける量子力学模型：**
本解説では1次元1自由度のシュレディンガー方程式の束縛状態を扱い，エネルギー固有値$\mathcal{E}_n$と固有関数$\phi_n(x)$が具体的に求まっている場合を指す．

**前方・後方ずらし関係式：**
直交多項式$P_n$に微分演算子（差分演算子）を掛けて$P_{n\pm1}$を得る関係式．但し$P_{n\pm1}$のパラメータは$P_n$のものからずれている．

**形状不変性：**
量子力学模型が解けるための十分条件の1つ．

**生成消滅演算子：**
場の量子論などでは文字通り粒子を生成・消滅させる働きを持つ演算子だが，ここでは固有関数$\phi_n(x)$を$\phi_{n\pm1}(x)$に変える演算子．調和振動子以外の解ける模型に対して，その自然な構成法が2006年に見い出された．

**新しい種類の直交多項式：**
次数に欠落があるにも拘らず完全系をなす直交多項式．2008年の発見以降精力的に研究が行われ，2階微分方程式（差分方程式）を満たす古典直交多項式を基に構成され，やはり2階微分方程式（差分方程式）を満たしている．例外直交多項式，多添字直交多項式と呼ばれている．