

## 量子推定理論による不確定性関係の定式化

渡辺 優 〈京都大学基礎物理学研究所 yuwata@yukawa.kyoto-u.ac.jp〉

上田正仁 〈東京大学理学系研究科 ueda@phys.s.u-tokyo.ac.jp〉

不確定性関係は量子力学の本質を端的に表現する関係式として知られているが、その意味するところは見かけほど単純ではない。不確定性関係の研究はハイゼンベルクがガンマ線顕微鏡で電子の位置と運動量の測定精度に関する思考実験を行ったことにはじまる。ガンマ線で電子の位置を $\Delta x$ の精度で測定すると、測定の反作用を受けて運動量が $\Delta p$ だけ不確定になり、両者が不確定性関係

$$\Delta x \Delta p \geq h/2$$

を満足するという主張である。この不確定性関係は、測定器の役割が物理量の測定結果に本質的な役割を果たすというボーアの相補性を端的に表現したものであると解釈できる。一方、標準的な量子力学の教科書で議論される、物理量の標準偏差の間に成立する不確定性関係は「互いに非可換な物理量が同時に定まった値を持つことはできない」という量子状態の非決定性を表している。これは、測定の相補性の数学的な証明であると間違っで紹介されることもある。しかし、相補性と非決定性は全く異なった概念である。実際、後者は任意の波動関数に対して数学的に不等式が証明できる概念であるが、前者は誤差とは何か、擾乱とは何かを指定してはじめて具体的な意味を獲得する。不確定性関係が今なお最先端の研究対象として議論されているのは、誤差と擾乱に関して万人に共通する認識が未だ確立されていないからである。

ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の議論は、粒子を古典的に扱った半古典論であるため、現代的な量子測定理論の枠内で考え

た場合に、誤差と擾乱の間にどのような不確定性関係が成立するのだろうかという自然な疑問が沸き起こる。しかしながら、量子測定理論では測定される対象系だけでなく測定器も量子力学にしたがうため、対象系の量子揺らぎだけでなく測定器の量子揺らぎも測定結果に影響し、その解析は単純ではない。一般の測定過程について、測定器の出力と対象となる物理量の間関係を明らかにし、対象について有意な情報を取り出す合理的な方法は何か、という問題が生じる。このような問題に対して解答を与えるのが量子推定理論である。

量子推定理論の観点からは、測定誤差は測定によって得られたフィッシャー情報量の逆数として与えられる。フィッシャー情報量は統計学における最も重要な量の一つであり、測定データから推定された物理量の推定精度を与える。すなわち、物理量の変化に対応して、測定値がどれだけ変化するかという感度を与える量である。

測定の反作用の影響で、測定過程はユニタリではなく、非可逆な過程となる。そのような非可逆な過程では情報量は単調減少するため、測定過程の非可逆性を失われた情報量として特徴付けられる。したがって、擾乱は対象系の持つフィッシャー情報量の損失として定式化できる。

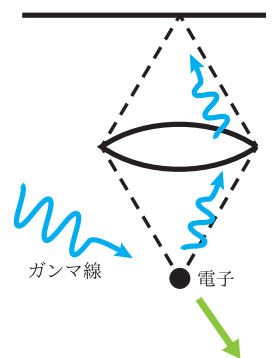
我々は、このように定式化された誤差と擾乱の積の下限が交換関係で与えられるというトレードオフ関係を見出した。こうして、ハイゼンベルクが思考実験で指摘した測定誤差と擾乱の間の不確定性関係が量子推定理論の観点から定量的に示された。

## —Keywords—

**ハイゼンベルクの思考実験：**ハイゼンベルクは自身の提出した量子力学の行列理論の物理的な意味を考察するために、いくつかの思考実験を提示した。最も有名なものは1927年の論文で議論された「ガンマ線顕微鏡の思考実験」である(下図)。この思考実験では、電子の位置を正確に測定するためには、波長の短い光(=ガンマ線)が必要であることを述べた上で、そのような波長の短い光は大きな運動量を持つために電子の運動量を大きく変えてしまい、電子の運動量を不確定としてしまうことが論じられた。

**フィッシャー情報量：**確率分布関数に現れるパラメータに関して、分布関数を持っている情報量を表したものの、フィッシャー情報量が大きいほど、パラメータに対する原理的な推定精度が向上する。

**量子推定理論：**統計学における推定理論を量子力学に拡張した理論。実験の観測データから、物理系についての推定や得られる情報の限界について考察する。



ガンマ線顕微鏡の思考実験の模式図。電子から散乱されるガンマ線を観測することによって電子の位置を測定する。