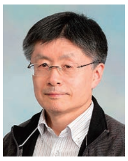
行列模型による超対称ゲージ場の量子論の解明と進展



糸山浩司
大阪市立大学大学院理学研究科
itoyama@sci.osaka-cu.ac.jp

行列模型と言うと，多体問題に造詣の深い読者はM. L. Mehtaによる有名な本“Random Matrices”で取り扱われている原子核のレベル間隔の問題を，あるいは中年以上の弦理論研究者は90年代初頭に集中的に研究されたランダム面に基づく2次元重力やそれに対応する弦理論を思い起こされるかもしれない．本稿で解説するのは，超対称性と呼ばれるボソンとフェルミオンの入れ替えに関する対称性を持つ4次元場の量子論の低エネルギー極限の厳密決定の問題において，行列模型が果たす意外な役割と現在までにもたらした進展についてである．

K. Wilson以降の現代的な場の量子論の取り扱いにおいては，あるスケールにおける有効理論は，場のそれより高い振動数部分をもとの作用に関して積分することによって得られる．こうして得られた作用を有効作用（effective action）という．超対称性が極小のもの（$\mathcal{N}=1$と名付ける）から拡大された場合（$\mathcal{N}\geq 2$），あるいはそれが自発的に破れた場合，有効作用はひとつの正則汎関数で特徴づけられる．その低エネルギー極限を$\mathcal{F}$と名付けよう．

今日まで20年以上にわたり$\mathcal{F}$に関する息の長い発展が続いている．3期に分けてまとめてみよう．拡大された超対称性を持つゲージ理論の真空では，フォトンとその相棒のみが質量を持たずにとどまる．一方真空は，値の決まらないスカラー場の期待値で指定される縮退した真空であることがSeiberg–Wittenの仕事により明らかになり，第1期の発展は始まった．正則関数$\mathcal{F}$は，リーマン面＝代数曲線と，その上に住み無限遠点で極を持つ微分から，陰関数として厳密決定され，今日ではSeiberg–Witten系と呼ばれている．その後ほどなく極の次数を上げる拡大系が提案され，行列模型の自由エネルギーの表式との類似性が明らかになり，後年の発展につながった．第2期は，グルーオンの相棒のグルイーノに関するカイラル対称性が自発的に破れた$\mathcal{N}=1$真空上の有効作用，そのオーダーパラメターを引数とする新たな正則関数$\mathcal{F}$に関する発展である．この場合の適切なリーマン面は，行列模型の固有値がいくつもの区間に分かれて分布している場合に合致した．正則関数$\mathcal{F}$の厳密決定問題においては，このオーダーパラメターを超ポテンシャルにあるパラメターと合わせ，拡大系を定義する．この立場からの進展が一挙に進み，最終的には行列模型と同型な場の量子論のSchwinger–Dyson方程式が得られ，謎解きが完了した．$\mathcal{N}=2$真空に戻って，第3期はインスタントン和としてのSeiberg–Witten系の微視的理解に始まった．一方，摂動論のlog補正を受けない場合を親玉とする別のタイプの代数曲線に対しても同型なリーマン面を与える行列模型が定まった．行列模型の分配関数の共形ブロックの積分表示としての顔とインスタントン和としての顔を活用し，いわゆるAlday–Gaiotto–立川関係式の直接生成が実行されている．

これらの実例により，正則関数$\mathcal{F}$は適切に定義された行列模型（あるいはその拡張ensemble）の自由エネルギーFと同一視できることが判明してきた．$\mathcal{F}=F$.

—Keywords—

リーマン面＝代数曲線と周期：
学部の物理数学で少し触れるリーマン面とは，複素平面をいくつか用意し，実軸上何箇所かに切り口を入れ，これに関して貼り合わせたものである．実際には切り口には特異性は無く，複素数を係数とする2変数多項式による方程式で定まる2次元複素空間内の曲線となっている．この上で，一般には極を持つ微分ωを用意する．切り口の周り，あるいは切り口の中に潜り込むループγに沿った積分を，ωのγに関する周期という．

インスタントン和：
インスタントンとは，4次元ユークリッド空間での非アーベル的ゲージ理論の解である．解は位相的に非自明で，正の整数kでラベルされ，作用の値はkに比例する有限値である．ミンコフスキー空間では，インスタントン和は作用の値を重みとするトンネル効果に対するWKB振幅を与えている．摂動による量子補正が抑制される超対称ゲージ理論では，インスタントン和が真空のトンネル遷移を担っている．インスタントン和の精密な評価には，その周りに生じるゼロモード積分を実行する必要がある．

Schwinger–Dyson方程式：
古典論の運動方程式は作用を変分して得られる．量子論の運動方程式を得るには，作用を重みとして，考えている相関関数と経路積分の測度の部分も含めて変分すればよい．こうして得られる異なる相関関数のあいだの関係式を，一般にSchwinger–Dyson方程式という．一般には無限個の方程式からなり，古典の運動方程式からくる部分以外に，接触項，量子異常の項を含む．変分を対称性と関係付けると，一般には異常項を含むWard–高橋の式となる．