リウビル力学に基づいた小惑星分布の縞構造の分析

Tomio Petrosky

Dept. of Physics, University of Texas at Austin
petrosky@physics.utexas.edu

野 場 賢 一

大阪府立大学大学院工学研究科
noba@ms.osakafu-u.ac.jp

我々の太陽は数十万個以上の小惑星群によって帯状に囲まれている．火星と木星の間に数多く存在している小惑星の長半径方向の空間分布は縞構造をしており，バンド構造を持っている．また，その分布上の縞構造のギャップの位置が小惑星の振動数と木星の振動数が単純な整数比になるところに存在している事実から，このギャップが現れる定性的な根拠は木星の運動と小惑星の運動の間の共鳴効果によるものであることがわかる．しかし，古典力学では共鳴効果が系の運動の恒量を破壊してしまうために非可積分となり，軌跡を扱う力学の常套手段である正準変換によって系の定量的な振る舞いを解析的に論じることが原理的に不可能になっている．

本稿では，その定量的な分析をするために，少数系の古典力学で伝統的に使われてきた軌跡力学とは全く別で，それとは相補的なリウビル力学の立場から，どのようにこのギャップの大きさが評価されるかを紹介する．

筆者の一人（TP）は非平衡統計力学を長年研究テーマとしてきて，古典力学でも量子力学のハイゼンベルグ表示に対応する物理量の時間変化を記述する方法と，シュレディンガー表示に対応する状態関数の時間変化を記述する方法があることに深い関心を持っていた．古典力学ではハイゼンベルグ表示に対応する記述法の基本方程式はハミルトンの運動方程式であり，シュレディンガー表示に対応する記述法の基本方程式はリウビル方程式である．非平衡統計力学では自由度の数があまりにも多く，その系に対応するハミルトン方程式を全部書き下すことができない．そのことから，この分野では状態関数というたった一つの関数の時間変化を記述するリウビル方程式を追うことにして，リウビリアンやそれに類似したボルツマン方程式の発展の生成演算子である衝突演算子の固有値問題の解から，系の力学的性質を分析する．

そして，これらの古典力学的演算子にも，量子力学のハミルトニアンと同じように連続スペクトルを持つ場合もあれば，典型的なガス系のように不連続スペクトルを持つ場合もあることはよく知られている．

それなら，リウビリアンにも結晶中の電子のハミルトニアンのようにバンド構造を持つ場合があるのでないか．もしそうなら，リウビリアンの物理的次元が振動数であることから，Keplerの第3法則によって振動数スペクトルのバンド構造はそのまま小惑星の空間分布の長半径方向のギャップを与えるのではないか，という考えを筆者の一人（TP）は大分以前から暖めていた．最近になって，日本の物性物理学者の何人かの友人と議論することによって，摂動の影響で共鳴点上でのハミルトニアンの固有値の縮退が解け，準位反発によって電子のエネルギーギャップが起こるのと同様な数学的メカニズムで，小惑星の振動数スペクトルにも木星の摂動で準位反発が起こり，ギャップが現れることを見出した．この取り扱いでは，たとえ古典力学の非可積分系であっても，縮退のある場合のよく知られた摂動論を使って，そのギャップを定量的に論じられる可能性を与えてくれる．

—Keywords—

リウビル方程式：
古典力学における状態関数の従う物理学の基本的偏微分方程式の一つ．ここで状態関数とは，系を記述する正準変数の関数のことである．それに対して，古典力学における正準変数の従う基本的常微分方程式がハミルトンの運動方程式である．

リウビリアン：
状態関数の時間発展の生成演算子のこと．量子力学の対応する時間発展の生成演算子であるハミルトニアンにならって，そう呼ばれている．

古典的ハイゼンベルグ表示とシュレーディンガー表示：
系の時間発展を力学変数の時間発展によって論じるのをハイゼンベルグ表示，それに対して，状態関数の時間発展によって論じるのをシュレーディンガー表示と言う．古典力学でもこの二つの表示法が存在する．

制限三体問題：
重力で相互作用している三つの古典粒子（天体）のうち，着目粒子の質量が残りの二つの粒子の質量と比べて無限に小さい場合の着目粒子の運動を取り扱う問題．残りの二つの粒子の影響を既知の外場として取り扱うことができるので，一般の三体問題よりも運動方程式が比較的易しくなっている．