

リサージェンス理論：摂動論から非摂動効果を理解する



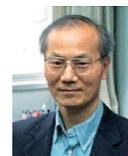
藤森 俊明

慶應義塾大学自然科学
研究教育センター

toshiaki.fujimori@keio.jp



三角 樹弘

秋田大学大学院理工学研究科
misumi@phys.akita-u.ac.jp

坂井 典佑

慶應義塾大学自然科学
研究教育センター

norisuke.sakai@gmail.com

量子力学、場の量子論や古典力学で厳密に解ける問題は少ないため、小さな結合定数についてべき級数展開を行う摂動論は極めて有用である。たとえば量子電磁力学の摂動論の結果は驚くべき精度で実験と一致する。しかし、摂動級数は収束しないという問題が古くから指摘されてきた。一方、様々な量子系において、トンネル効果など摂動論でとらえられない「非摂動効果」も存在し、重要な役割を果たす。実際、場の量子論ではインスタントンなどを考慮することによって、非摂動効果が得られる。

実は摂動級数の発散と非摂動効果に関係している可能性は古くから指摘されてきた。近年、**リサージェンス (resurgence) 理論**によって、量子論における摂動論と非摂動効果との直接的な関係の理解が進化した。微分方程式や積分の漸近級数解析などの数学的研究で得られた厳密な知見を応用して、量子論におけるリサージェンス理論の理解が進み、新たな結果が次々と得られている。

摂動論では、展開係数が次数 n の階乗 $n!$ 程度で発散する。そのような場合、**ボレル総和法**が有用である。発散する摂動級数からボレル変換という量が厳密に定義でき、これが摂動級数の情報を忠実にとらえる。たとえば、ボレル変換の特異点が摂動級数の発散の仕方を表す。一方、各々の特異点是非摂動効果と対応する。したがって、潜在的にどのような非摂動効果が生じ得るかは、摂動級数のボレル変換の中にすべて記録されている。一般に、摂動級数の発散の仕方に非摂動効果の情報が書き込まれていることを**リサージェンス構造**と呼ぶ。

ボレル変換のラプラス変換をボレル和と

呼び、これが摂動級数の総和を表す。ラプラス変換の積分経路は正実軸上だが、その上にボレル変換の特異点が生じると、積分路を変形する(結合定数に虚部を与える)必要があり、その結果ボレル和に不定性が生じる。

一方、勾配流 (gradient flow) の解析からバイオンと呼ばれるある種のソリトンが非摂動効果を与えることがわかる。バイオンの寄与にも結合定数の虚部の符号に応じて不定性が生じるが、摂動級数のボレル和と同じ符号をとると両者の和に不定性がなくなる。すなわち、両者の非自明な関係によって不定性の相殺が起こるため、物理量全体としての一貫性が保たれる。つまり、摂動・非摂動部分はそれぞれ単独では不定で、両者を足し上げて初めて厳密な意味がある。この不定性の相殺から定まる「摂動論と非摂動効果の間の対応」により一方の寄与からもう一方を導き出すことも可能となる。

常微分方程式ではリサージェンス構造は完全に理解されており、一般解は**トランス級数**と呼ばれる複数の形式的漸近級数解のボレル和の足し合わせで表される。パラメーターを変えていくと、個々のトランス級数の係数が不連続に変化する**ストークス現象**が起こる。しかし、真の解は連続なので、ストークス現象によって漸近級数解の間に関係が付くことがわかる。このようにあるセクターの情報が別のセクターに再登場する機構がリサージェンス構造である。量子力学でもこの構造の理解が進出し、さらにQCDやヤン-ミルズ理論、赤外リノマロンなども議論されつつある。

—Keywords—

リサージェンス理論：

摂動論の漸近級数の中から非摂動効果の情報を得る理論。一般に異なる背景場上の摂動級数の間の関係を与える。

ボレル総和法：

解析関数の漸近展開級数から、元の解析関数を再構成する方法。漸近級数からボレル変換を構成し、それをラプラス変換して解析関数(ボレル和)を得る。

トランス級数：

ボレル和で定義される漸近級数と非摂動的指数因子との積の和のこと。一般に量子力学の物理量や常微分方程式の解はトランス級数で表される。

ストークス現象：

解や関数の漸近形がパラメーターの位相に応じて不連続に変化する現象。トランス級数の中の個々の漸近級数の係数に跳びが生じるが、それらの和(トランス級数)は全体として連続的である。

赤外リノマロン：

QCDなどの漸近自由な場の量子論で、特定のファインマン図の無限和から生じるボレル変換の特異点(漸近級数)。低エネルギーの非摂動効果に関係すると考えられている。