

# ラトルバックのダイナミクス

近藤洋一郎

中西 秀 (九州大学理学研究院 nakanisi@phys.kyushu-u.ac.jp)

ラトルバックは半楕円体の小さな科学おもちゃだ(図1)。テーブルの上でまわすと、一方向にはスムーズに回転するが、反対方向にまわすとがたがた振動して回転が止まり、やがて逆にまわり始める。見かけは鏡映対称なのに明らかに非対称な動きをする。

先史時代の遺跡から見つかる石器に同様の振る舞いをするものがあり、セルト石(Celtic stone<sup>\*1</sup>)と呼ばれていた。Celtは矢じりやのみの刃などに使われた石器をさすが、<sup>\*2</sup>古代の石器がこのように振る舞うのを見て、何やら神秘的な力を感じた人もいたようだ。しかし、河原や海岸に転がっている石でも、このような不思議な動きをするものを見つけることはできる。ラトルバックという名前はJearl Walkerのエッセイ<sup>9)</sup>で有名になった。

## 疑問

そもそも、まわした方向とは反対向きにまわり始めるのは奇妙だ。「角運動量保存則に反していないのか?」、「力学の時間反転対称性はどうなっているのか?」など、素朴な疑問がわいてくる。テーブルとの摩擦が重要に違いないが、力学的にどう理解すればよいのだろうか。

この問題には多くの著名な物理学者も興味を持ってきた。最初の科学的論文は、後に気象学者として名を残した応用数学者Walkerによる1896年のものだ。<sup>8)</sup>彼は、セルト石の底面の主曲率の方向が慣性モーメントの軸と一致していない場合に、定常回転が不安定化し、振動が励起されることを示した。興味深いことに、この不安定化はどちらの回転方向にも起こる。回転方向と励起される振動の振動数と



図1 ラトルバック。

の関係も議論している。また、慣性モーメントや重心の位置を調整できる模型を作って実験を行い、理論解析と整合することを確認した。

定常宇宙論で有名なBondi<sup>1)</sup>は詳細な安定性解析を行い、ラトルバックのパラメータや回転の速さに依存して、不安定性にいくつかのタイプがあることを見出した。GarciaとHubbard<sup>3)</sup>は振動が生成するトルクを求め、反転に要する時間の表式を得た。彼らは様々な散逸の効果も検討して、実験との比較も行っている。

低温物理学者のPippard<sup>7)</sup>もラトルバックに魅せられた学者の一人だ。彼は、ワインボトルの上部を4分の1切り出したものに真鍮の板を固定して慣性モーメントを調整することによって、続けて4~5回も反転するラトルバックを作って見せた(図2)。

## 力学モデル

ラトルバックは、もちろん剛体の運動方程式で記述される。<sup>\*3</sup>散逸を無視すれば、外力は重力と床からの抗力のみだ。質量を $M$ 、重心まわりの慣性モーメントテンソルを $\hat{I}$ とすると、剛体の重心速度 $v$ と角速度 $\omega$ は、

$$\frac{d(Mv)}{dt} = F - Mgu, \quad (1)$$

$$\frac{d(\hat{I}\omega)}{dt} = r \times F \quad (2)$$

に従う。重力は $-Mgu$ 、床からの抗力を $F$ とした。 $r$ は重心 $G$ を始点とした床との接点 $C$ の変位ベクトルである。

問題は抗力 $F$ だ。これは垂直抗力と摩擦力からなり、床との接点条件で決まる。最も単純な仮定として、(i)ラトルバックはいつも一点で床と接し、(ii)スリップなしに転

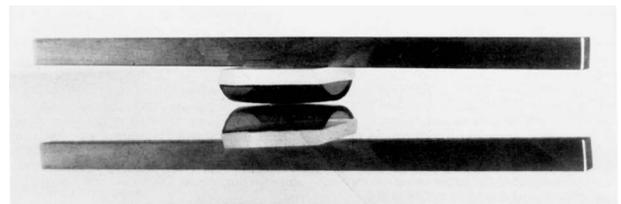


図2 Pippardのラトルバック。鏡の上に置いて斜めから写真に撮ったもの。ワインボトルを切り出したものに樹脂の板を張り付けてその上に真鍮の板を固定している。下に映った鏡像と合わせて、ワインボトルの2つの曲率がはっきり分かる。文献7より転載。

<sup>\*1</sup> ケルト人を意味するCeltと同じつづりで混同されることがある。

<sup>\*2</sup> "Celt"のこの用法そのものも、いくつかの誤解と混乱に基づくものようだ。<sup>6)</sup>

<sup>\*3</sup> ここでの問題の定式化は文献4による。

がるとする.

ラトルバック底面の形状は関数 $f$ を用いて

$$f(\mathbf{r})=0 \quad (3)$$

で表されるとしよう. また, 接点での底面の法線ベクトルは単位鉛直ベクトル $\mathbf{u}$ に平行, 即ち

$$\nabla f(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{u} \quad (4)$$

でなければならない. 接点ベクトル $\mathbf{r}$ はこの2つの条件(3)と(4)で決められる.

一方, 抗力 $\mathbf{F}$ はスリップ無し条件

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

から決まり, これがラトルバックの奇妙な振る舞いをもたらす. 式(5)は非ホロノミック拘束条件で, 後で触れるように, この力学系の振る舞いに際立った特徴を与える.

### 剛体座標系

図3のように, 重心 $G$ を原点, 慣性主軸を座標軸とする剛体固定座標系を考える. すると慣性モーメントテンソルは対角行列

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (6)$$

で表される. 底面の形は2次曲面とする. すると, 主曲率方向が $x$ - $y$ 面内で慣性主軸から角度 $\xi$ ずれているとき, 形状関数は

$$f(\mathbf{r}) = \frac{z}{a} - 1 + \frac{1}{2a^2}(x, y) \hat{\Theta}_\xi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

で与えられる. ここで,

$$\hat{\Theta}_\xi \equiv \hat{R}(\xi) \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \hat{R}(\xi)^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{R}(\xi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \quad (9)$$

である.  $a$ は重心 $G$ の高さで, 主曲率は $\theta/a$ および $\phi/a$ で与えられる.

通常のラトルバックでは $\xi \ll 1$ である. また, 静止状態では $z$ 軸が鉛直下向きで安定とする. 図3のように短軸に近い方を $x$ 軸に取ると, ラトルバックのパラメータは, 通常

$$I_{xx} > I_{yy}, \quad 1 > \theta \gg \phi \quad (10)$$

のように与えられる.

### ダイナミクス

数値シミュレーションには, 運動方程式(1)と(2)から $\mathbf{F}$ を消去して, スリップ無し条件(5)を用いて $\boldsymbol{\omega}$ の式にしたものを, 鉛直ベクトル $\mathbf{u}$ が一定の条件

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

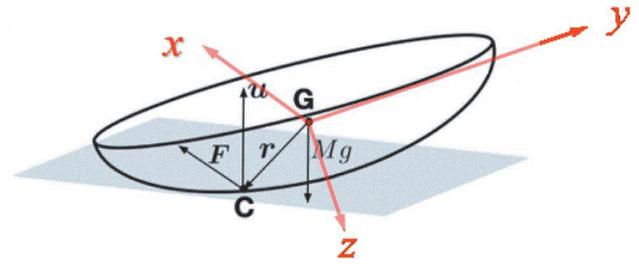


図3 ラトルバックに固定された座標系.

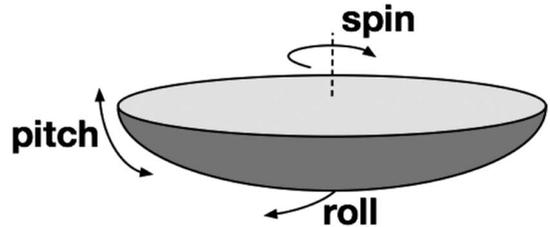


図4 ラトルバックの3つの運動モード.

と連立して解くのが便利だ. 但し,  $\dot{\mathbf{u}}$ は剛体系での時間微分を表す. 解くべき変数は $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{u}$ だが,  $|\mathbf{u}|=1$ なので独立な変数の数は5つである.

微小振動の場合には, 剛体系の $z$ 軸が鉛直ベクトル $\mathbf{u}$ にほぼ平行で, ラトルバックの運動は, スピン $n \equiv \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \approx -\omega_z$ に加えて, ピッチ(縦揺れ)とロール(横揺れ)振動の2つの振動によって記述される(図4). ねじれ角 $\xi$ が小さいとき, ピッチとロールはそれぞれ $(u_y, \omega_x)$ と $(u_x, \omega_y)$ でおおよそ表される.

図5にねじれ角 $\xi$ が負の場合のシミュレーション結果を示す. 初期スピンの正のときにはピッチが励起され, 負の場合にはロールが励起されることが分かる.\*4 ピッチが励起される前者の方が反転時間がずっと短いことに注意してほしい.

### スピンと振動の結合

ねじれ角 $\xi$ がゼロでない場合には, 振動と回転がカップルする. 即ち, それぞれのモードの振動が存在するとき, 応力 $\mathbf{F}$ による鉛直軸まわりのトルク

$$T \equiv \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (12)$$

の振動一周期の平均がゼロにならない.

スピンをゼロに固定して, 更に, 微小振動の近似の下では, それぞれの振動モードによる時間平均トルク $\bar{T}$ と振動エネルギー $E$ の比

$$-K_p \equiv \frac{\bar{T}_p}{E_p}, \quad K_r \equiv \frac{\bar{T}_r}{E_r} \quad (13)$$

は振幅に依らず定数となる. これを非対称トルク係数と呼ぼう. 添え字の $p$ と $r$ はそれぞれピッチおよびロール振動を表す. 一般に $\bar{T}_p$ と $\bar{T}_r$ は互いに逆符号となることが示さ

\*4 即ち, 主曲率方向が慣性主軸から上から見て左まわりにずれている場合, スピンが上から見て左まわりのとき, ピッチが励起される.

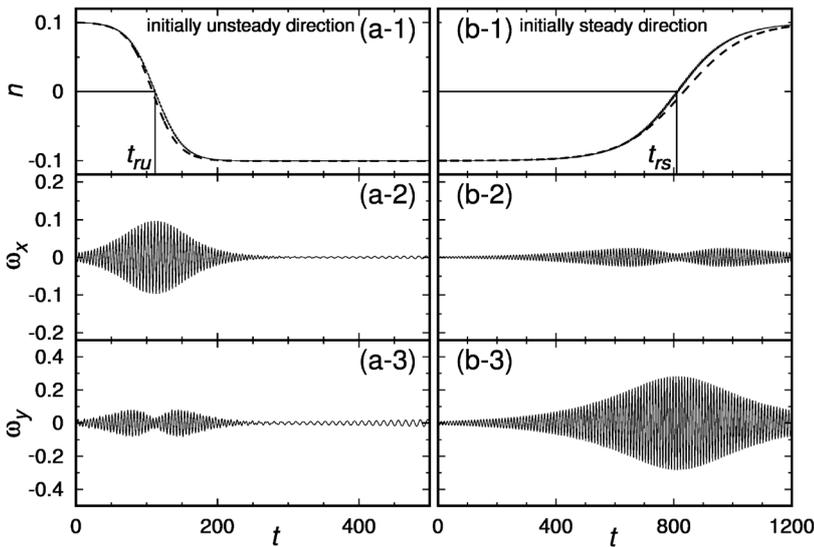


図5 ラトルバックのシミュレーション結果. 左図は初期スピンの正, 右図は負の場合. 実線はもとの方程式(1)と(2), 破線は3変数ダイナミクス(18)-(20)による.  $\omega_x$ はピッチ,  $\omega_y$ はロールを主に表しているが, スピン $n$ の反転時間に比べて短い時間スケールで振動していることが分かる. ラトルバックのパラメータは文献3と同じものを用いた. 特にねじれ角を負( $\zeta < 0$ )としていることに注意. 数字は $a, M, g=1$ となる単位系による.

れるので,  $K_p$ と $K_r$ が同符号となるように定義した. トルクとエネルギーは同じ次元を持つので非対称トルク係数は無次元量であることに注意しよう. 具体的表式として

$$K_p = -\frac{1}{2} \sin(2\zeta) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 - \omega_r^2}, \quad (14)$$

$$K_r = -\frac{1}{2} \sin(2\zeta) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) \left( \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\omega_r^2}{\omega_p^2 - \omega_r^2} \quad (15)$$

を得る.<sup>5)</sup> 但し,

$$\alpha \equiv \frac{I_{xx}}{Ma^2} + 1, \quad \beta \equiv \frac{I_{yy}}{Ma^2} + 1 \quad (16)$$

は, 静止時の接点(0, 0, a)を通るそれぞれx軸およびy軸に平行な軸まわりの無次元化された慣性モーメント,  $\omega_p$ および $\omega_r$ はそれぞれピッチおよびロール振動の角振動数である.

非対称トルク係数の表式(14)および(15)は非常に簡単な形をしている. 即ち, (i) ねじれ角, (ii) 慣性モーメントの逆数の差, (iii) 曲率半径の差, (iv) 振動モードの振動数の2乗, の4つの因子からなり, 2つの係数の比は単に振動数の2乗の比

$$\frac{K_p}{K_r} = \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2} \quad (17)$$

となる. 通常 $\omega_p^2/\omega_r^2 \gg 1$ なので, ピッチ振動のほうが回転とずっと強く結合することが分かる. また,  $\zeta < 0$ とすると,<sup>5)</sup> 通常のラトルバックで式(10)の場合には, 式(14)および(15)の因子はすべて正である.

ラトルバックでピッチ振動のほうがロール振動よりずっと速い主な理由は, 2つの主曲率の差が大きいためだ. 図1のようなラトルバックでは, 長軸方向の曲率半径は短軸方向のものより10倍以上大きい. ラトルバックの反転時間の非対称性はこの差に由来する.

### 3変数ダイナミクス

この非対称トルク係数を用いて, スピン $n$ , ピッチ振動エネルギー $E_p$ , ロール振動エネルギー $E_r$ からなる3変数ダイナミクスを考える. スピンや振動の振幅が小さく, 図5のように, これらの量が大きく変化する時間スケールが振動の周期に比べて長い場合, 振動周期での変数の時間変化を無視した粗視化ダイナミクス

$$I_{zz} \frac{dn}{dt} = -K_p E_p + K_r E_r, \quad (18)$$

$$\frac{dE_p}{dt} = K_p n E_p, \quad (19)$$

$$\frac{dE_r}{dt} = -K_r n E_r \quad (20)$$

によって, 系は近似的に表されるだろう.<sup>5,6)</sup> 図5の破線はこのダイナミクスのシミュレーション結果で, 実際, 系の振る舞いをよく記述している.

この3変数ダイナミクスには以下の2つの保存量があるので, 一般に周期運動をする. 即ち, 全エネルギー

$$E_{\text{tot}} \equiv \frac{1}{2} I_{zz} n^2 + E_p + E_r \quad (21)$$

のほかに,

$$C \equiv \frac{1}{K_p} \ln E_p + \frac{1}{K_r} \ln E_r \quad (22)$$

が保存する. 吉田らはこれをカシミール保存量と呼んだ.<sup>10),6)</sup> これは, ピッチやロール振動の時間スケールに比べてスピン反転がずっとゆっくりしている場合に近似的に保存する量で, その点, 断熱不変量に似ている.

式(18)-(20)を解くことにより, 初期スピン $n_0$ が正あるいは負の場合の反転時間 $t_{r\pm}$ を計算することができ,

\*6 ハミルトニアン $H$ とポアソン括弧式 $\{, \}$ を適当に定義することにより, この系のダイナミクスは $dQ_i/dt = \{Q_i, H\}$ の形に記述できる. このポアソン括弧式で $\{C, H\} = 0$ であれば $C$ は保存量だが, 任意の物理量 $G$ に対して $\{C, G\} = 0$ となる保存量を, 文献10ではカシミール保存量と呼んでいる.

\*5 過去の文献との対応から $\zeta < 0$ とする.

$$t_{r+} \sim \frac{1}{|n_0 K_p|}, \quad t_{r-} \sim \frac{1}{|n_0 K_r|} \quad (23)$$

程度と見積もられる。  $K_p \gg K_r$ 、即ち  $\omega_p^2 \gg \omega_r^2$  の場合には  $t_{r-} \gg t_{r+}$  となり、負の方向にまわしたときの反転時間は正方向に比べてずっと長い。そのため、散逸のある実際のラトルバックでは、“安定方向”の回転では反転が起こる前に散逸のために回転が止まってしまう、“不安定方向”の反転しか観察されないことが多い。

式(23)の反転時間が初期スピン  $|n_0|$  に反比例している点は興味深い。つまり、反転までの回転数は  $1/|K|$  程度で、初期スピンの大きさにはほとんど依らない。ただし、これはスリップなしの条件での結果で、実際には高速回転させるとスリップが起こり、厳密にはこのような簡単な関係は成り立たないかも知れない。しかし、ラトルバックをまわしてみると、速くまわしてもすぐに反転してしまうのに驚かされる。

### 散逸無しラトルバックのカオス

3変数ダイナミクスは、低速スピン・微小振動、かつ、振動の周期が反転の時間スケールに比べて十分小さいときには、系をよく記述する。しかし、高速スピン・大振幅振動領域や、振動周期が長い場合、この近似は悪くなる。特に、“カシミール保存量”(22)は保存せず、系の振る舞いはより複雑になる。

図6に、ロール方向の曲率  $\theta$  を変えた系の振る舞いを示す。実線がもとの運動方程式(1)と(2)、破線が対応する3変数ダイナミクス(18)-(20)のシミュレーション結果である。 $\theta$  が大きいと横揺れの振動の復元力が弱く、振動数  $\omega_r$  が小さくなる。シミュレーション結果も、(a)では両者の一致は非常に良いが、(b)や(c)では、一回反転した後の振る舞いが3変数ダイナミクスとは全く異なる。即ち、(b)ではスピンの不規則な揺らぎが見られ、(c)では周期が3変数ダイナミクスのものとは全く異なる。おまけに、最初の反転後しばらくは過渡的な振る舞いが見られ、周期運動が始まった後の周期も一回ごとに微妙に変化している。これらの特徴は、少数自由度の保存系のダイナミクスとしては極めて興味深い。即ち、軌道が最初の過渡的な振る舞いの後、アトラクターに至っているかのようで、散逸系のダイナミクスを思い起こさせる。

いま考えている系には散逸が無く、力学的エネルギーが一定という意味では保存系である。ところが、スリップ無し条件のためにアトラクターの存在が禁止されていないのである。即ち、式(5)は非ホロミックな拘束条件なので、

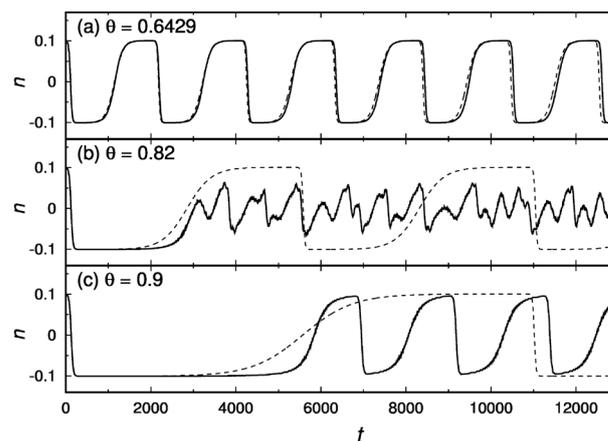


図6 ラトルバックのシミュレーション。(a)は図5と同じシミュレーション。(b)および(c)は  $\theta$  の値のみを変えた結果。破線は3変数ダイナミクスのもの。

系のダイナミクスは正準方程式では表せない。その結果、リウビルの定理が成り立たず、位相空間の体積が保存量とは限らない。つまり、この系はエネルギーが保存するにもかかわらず、散逸系に類似した振る舞いをする可能性がある。実際、最近の研究で、この系のカオス領域において散逸系に特徴的なストレンジアトラクターや周期倍化の分岐図なども報告されている。<sup>2)</sup>

ラトルバックは、これ以上単純になりようがないほど単純なおもちゃだ。しかし、その奇妙な振る舞いに、多くの物理学者が素朴な興味をかきたてられ、ひきつけられてきた。ダイナミクスは意外と複雑で、現在でも研究が続いている。

### 参考文献

- 1) H. Bondi, Proc. R. Soc. Lond. A **405**, 265 (1986).
- 2) A. V. Borisov et al., Regular Chaotic Dynamics **17**, 512 (2012).
- 3) A. Garcia and M. Hubbard, Proc. R. Soc. Lond. A **418**, 165 (1988).
- 4) Y. Kondo, PhD thesis, Kyushu University (2017).
- 5) Y. Kondo and H. Nakanishi, Phys. Rev. E **95**, 062207 (2017).
- 6) H. K. Moffatt and T. Tokieda, Proc. R. Soc. Edinburgh **138A**, 361 (2008).
- 7) A. B. Pippard, Eur. J. Phys. **11**, 63 (1990).
- 8) G. T. Walker, Q. J. Pure Appl. Math. **28**, 175 (1896).
- 9) J. Walker, Sci. Am. **241**, 172 (1979).
- 10) Z. Yoshida, T. Tokieda, and P. J. Morrison, Phys. Lett. A **381**, 2772 (2017).

### 非会員著者の紹介

近藤洋一郎氏：平成27年九州大学大学院理学府物理学専攻博士課程単位取得退学、博士(理学)。めずらしい科学おもちゃを発掘したり、オリジナルな力学おもちゃを3Dプリンタで作るのが趣味。本業は物理とは関係のない不動産関連。

(2017年9月13日原稿受付)