

拡がり続けるソリトンの世界

ソリトン方程式に新しいタイプの解が発見された。この解は従来のソリトン解を拡張したものであり、解内部に周期的に変化する関数を取り込んだ表示をしている。通常のソリトン解同様、ぶつかっても壊れない性質をもっている一方で、波の形が時間とともに変動しながら移動していくという独自の特徴を持っている。

ソリトンとは形状を変えずに進行する孤立波を指し、個々の孤立波同士がぶつかっても、相互作用を起こしつつもあたかも粒子のように壊れずに追い越すという性質を持つ。ソリトンを表す解を持つ方程式として、浅水波を表す Korteweg-de Vries(KdV) 方程式、Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程式が代表的なものとして挙げられる。他にも戸田盛和氏が1次元格子状に並んだばねモデルを1967年に日本物理学会が発行する英文誌 *Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)*にて与えており、こちらも今日戸田方程式と呼ばれる代表的なソリトン方程式として知られている。いずれも共通することは非線形な方程式ということにある。非線形である発展方程式の厳密解を求めることは一般に困難であることが知られている。しかしソリトン方程式の場合は様々な解を具体的に構成することができ、なぜそのようなことが起こるのかという数理構造を調べるため、これまで日本人を中心として研究が行われてきた。

一方近年ではソリトン方程式の研究は様々な分野へと発展してきている。例えばソリトン方程式は偏微分方程式のみならず、独立変数が飛び飛びの値をとる差分方程式においても存在するが、この飛び飛びの時間発展を数値計算のステップとみなすことで、行列の固有値計算などへの応用に用いられている。さらには超離散化と呼ばれる極限操作を、ある適切な条件下でソリトン方程式に行うことで、従属変数が有限個の状態のみを遷移し続けるような方程式が得られ、これらはトロピカル幾何やセルオートマトンなどの分野との関連が見出されている。

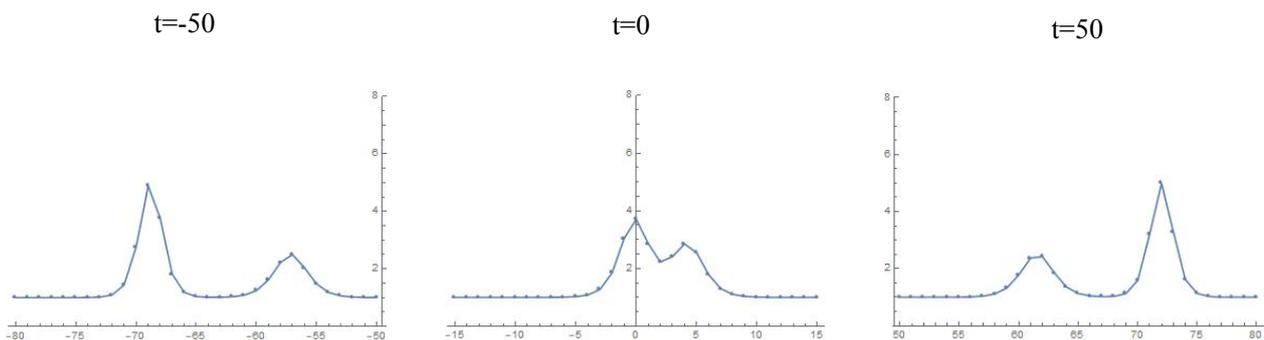


図1. 2ソリトン解の挙動 左から右に時間の推移を表す

上記に挙げたソリトン方程式はいずれも数学的な立場からみると A 型と呼ばれるクラスに分類される。この A 型の他に、B 型や D 型といったクラスのソリトン方程式が存在しているが、A 型に比べるとこれらのクラスの方程式の性質の詳細は明らかになっていない部分が多くある。最近、東海大学の長井秀友氏、神戸大学の太田泰広氏、早稲田大学の広田良吾氏らが D 型の離散ソリトン方程式から、Periodic Phase Soliton(PPS) 解という、ソリトン解の内部に周期関数を取り入れた解を

もつ方程式が存在することを発見し、JPSJ の 2019 年 3 月号に掲載された。広田良吾氏は「広田の方法」と呼ばれるソリトン解を求める手法を発明したことでも知られているソリトン理論の第一人者である。広田氏は 2015 年に惜しくも亡くなられたが、共著者らが研究を引継ぎ、数年をかけて論文が完成している。

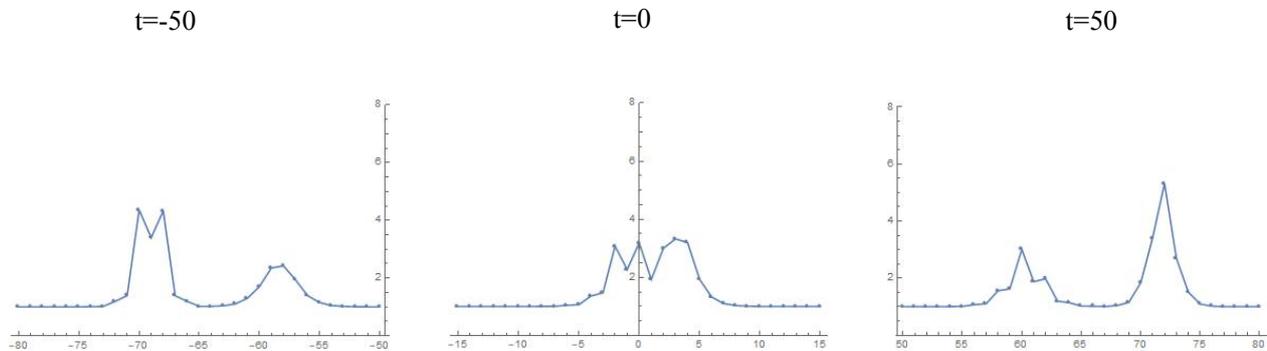


図 2. 2PPS 解の挙動

今回与えられた PPS 解は差分 PPS 方程式と呼ばれる差分方程式の解であり、通常のソリトン解の中に空間変数に対して周期的に変化する関数を取り込まれていることが特徴である。そのため、波の形状が通常のソリトンとは異なり時間発展にともなって周期的に変化する。図 1 は通常のソリトン解の時間発展を表しており、左から右に向かって動いてきた大きな波が、小さい波と衝突し追い越していく挙動を表している。一方、図 2 は PPS 解の時間発展を表している。大きな波が時間とともに形を変えながら右向きに進行していき、やがて小さい波にその性質を引き継いで追い越している。このような解は超離散系ではすでに存在することが知られていたが、本研究によって離散系でも存在することが明らかになった。さらに論文では超離散化を行い、先行研究の解との関連性についても議論している。

ソリトン方程式の研究が他分野における応用へと発展しつつある今、本研究で与えられた解がどのように応用されていくか今後期待される。

原論文

[Discrete and Ultradiscrete Periodic Phase Soliton Equations](#)

[Hidetomo Nagai, Yasuhiro Ohta, and Ryogo Hirota: J. Phys. Soc. Jpn. **88** \(2019\) 034001](#)

問い合わせ先：長井秀友（東海大学理学部）

太田泰広（神戸大学大学院理学研究科）