

# 活性・不活性振動子混在系の格子ラプラシアン結合によるマクロ振動抑制

## - 一般化自由エネルギーを用いた近似的アプローチ -

[1] 要旨：活性・不活性な非線形振動子が混在したがいに結合したときに、活性振動子の組（活性組）が勝利し不活性振動子の組（不活性組）を巻き込んだマクロな振動が生じるのか、それとは逆に不活性組が勝利し振動がピタリと止まるのか、という問題を解析した。複素ギンツブルグ・ランダウ方程式の離散形を基本式とし、二組近似（振動子集団を活性組と不活性組の二組に分け、組内は均質だとする）を用いることで一般化自由エネルギーを二変数関数として解析的に求め、不活性組が勝利する条件を導出した。てんかん発作抑制の数理解析への応用が論文後半に示されている。

## [2] 本文

不活性振動子が結合振動子のマクロな振動を止めてしまう転移現象（エージングトランジション）について研究が行われてきた。大域的結合から研究が始まったが、それ以外の結合、例えば拡散結合などに拡張されてきた。その際に活性振動子と不活性振動子の空間的配置が問題となる。両者が固まって混在する場合（図1左方）と、細かくばらけて混在する場合（図1右方）とでは、マクロな特性は当然異なる。この問題を解析的に解くことは難しく、多くの場合数値シミュレーションに頼ることになるが、それだけだと物理学的に理解したことにはならない。そこで、磁性の理論において平均場近似がマクロな性質に対するポテンシャル（ギンツブルグ-ランダウ自由エネルギー）を導出し、それによって物理学的かつ直観的な理解を深めたように、この問題に対してもそのような有効な近似処方が見られる。しかしながら、これまで結合振動子あるいは複雑系の分野においては半ば諦められていた。

最近、東大のメンバーを中心とした共同研究チームから、格子ラプラシアン結合（離散化拡散結合）した活性振動子と不活性振動子の示すエージングトランジションを解析的に扱う近似理論が提示された。この成果は、日本物理学会が発行する英文誌 *Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)* の 2019 年 5 月号に掲載された。

その近似法はギンツブルグ-ランダウの処方に倣っている。まず基本式を複素ギンツブルグ-ランダウ(CGL)方程式に設定している。この設定は振動子論で標準的なものであるが、著者等は先行論文で遅延微分方程式を CGL の形に近似（縮約）する方法を提示している。単なる簡単化の設定ではなく、論拠のある設定になっている。次に、一般化自由エネルギー(GFE)を用いて議論を進めている。GFE は結合振動子論の分野ではあまり使用されず、これを用いることが本論の特徴になっている。“実”ギンツブルグ-ランダウ (RGL) 方程式が GFE を持つことはよく知られているが、振動子を記述する“複素”ギンツブルグ-ランダウ (CGL)方程式の場合、一般には GFE を持たない。GFE が振動子論で使われない理由の一つはそこにあるが、モデルパラメータに制約を設ければ（しかもそれはそれほど特殊な制約ではない）GFE を持つことをフルに活用している。それでも多体系の GFE をそのまま計算すると、それは多変数になってしまい解析的に求めることにはならない。そこで、平均場近似に倣い二組近似という近似法を次のように導入した。平均場近似のように一つの秩序変数で系全体を記述することは、混在系の場合不可能である。一方、三変数以上になると解析解を得ることが望めなくなる。そこで、近似精度は粗いが二つの変数で系を記述する近似を考えた。

振動子多体系を活性組と不活性組の二つの組に分け、組内は均一であると近似する。全振動子が完全に同期することを前提とし、各組の振動振幅を二つの秩序変数とする。それにより二変数関数として GFE を求め、そのベキ展開から不活性組が勝つ（二つの組の振動振幅が共にゼロの状態が安定である）条件を解析的に導いている（図 2）。

上述した不活性組と活性組の空間的配置の効果は有効波数という形で自然に導出された。有効波数は両者のばらけ具合に対応しており、細かくばらけて混在している方が大きくかたまって混在している場合よりも大きな値になるが（図 1）、それは不活性組と活性組の相互作用を実効的に大きくする。そのことを数理的に示すことに成功している。

不活性組が勝つ条件を求めているのは、著者等がこの問題を定式化した動機が焦点性てんかんの数理解析にあったことによる。てんかん発作を神経回路による過剰な非線形振動とする数理モデルが提出されており、その妥当性が高まっている。このモデルで扱うてんかん発作の焦点が活性組に、また発作を抑える周囲の健全な組織が不活性組に対応する。今回提示されたアプローチによりこのモデルによる焦点性てんかんの物理学的理解が深められたが、それに限らず、同様な現象を統一的に理解する枠組みが示唆された。疾患の発症や病態遷移、その際に生じるゆらぎ、それらを物理学の視点から捉えることは今後益々重要になると考えられる。今後の発展を期待したい。

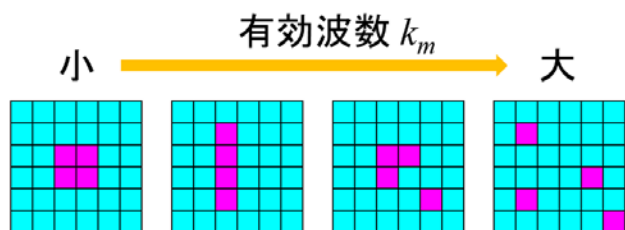


図 1 活性振動子（ピンク）と不活性振動子（水色）の平面内での配置例。各セルが振動子単体を表す。ばらけて混在すると有効波数  $k_m$  が大きくなる。

$$\alpha_S \mu_S + \alpha_H \mu_H < 0, \quad \frac{\mu_S \mu_H}{\alpha_S \mu_S + \alpha_H \mu_H} < r_e^2 k_m^2$$

$S$ : 活性振動子  
 $H$ : 不活性振動子  
 $\alpha$ : 存在割合 ( $0 < \alpha < 1$ )  
 $\mu$ : 活性度 (正負)  
 $r_e$ : 拡散係数 (結合長)  
 $k_m$ : 分布を特徴づける有効波数

図 2 導出された不活性振動子の組が勝つ条件。左側の不等式は活性度の単純平均が負（不活性）である必要を表している。右側の不等式に分布を特徴づける有効波数  $k_m$  が現れている。拡散係数（結合長） $r_e$  と有効波数  $k_m$  の積が活性組と不活性組みの結合の実効値となることが分かる。

## 原論文

### Suppression of Macroscopic Oscillations in Mixed Populations of Active and Inactive Oscillators Coupled through Lattice Laplacian

I. Yamaguchi, T. Isomura, H. Nakao, Y. Ogawa, Y. Jimbo, and K. Kotani, *J. Phys. Soc. Jpn.* **88**, 054004 (2019).

<News and Comments>

Another Role of Neural Communication: Suppression of Undesirable Oscillations

H. Kori, JPSJ News Comments **16**, 09 (2019)