

冷却原子系におけるサウレスポンプの2次元への拡張とディオファントス方程式

[1] 要旨

2次元正方格子に閉じ込められた冷却原子気体に斜めの超格子ポテンシャルを加えることで2次元サウレスポンプが実現可能となる系が提案された。この系におけるポンプ量は、あるディオファントス(Diophantine)方程式に従うことが示された。また、調和トラップ下で時間依存シュレディンガー方程式を解くことで、ポンプ量に対するトラップの影響が明らかにされた。

[2] 本文

トポロジカル相は、系の特徴がトポロジカル不変量で表されるような相である。トポロジカル不変量は、連続変形に対して不変であるという性質を持ち、バンドギャップが閉じない限り変化しない。代表的なトポロジカル相としては、整数量子ホール系やトポロジカル絶縁体などがある。整数量子ホール系では、ホール伝導度がトポロジカル数で表され、量子化される。

サウレスポンプは、1983年にD. J. Thoulessにより考案された。空間的に周期的なポテンシャルを時間的にも周期的に変化させることで粒子を輸送することができる。サウレスポンプでは、輸送される粒子数がトポロジカル数で表されるため、これもトポロジカル相の一種である。サウレスポンプは長い間理論上の存在であったが、2015年にドイツのBlochグループ、日本の高橋グループによる冷却原子系の実験で、1次元サウレスポンプが実現された。その舞台となった冷却原子系は、レーザーを用いた光格子の制御の自由度が高く、系の状態の測定方法も多様であるという特徴がある。特に、固体系では実現が難しい系のシミュレーションが可能であり、サウレスポンプに関しても、様々なセットアップが提案されている。

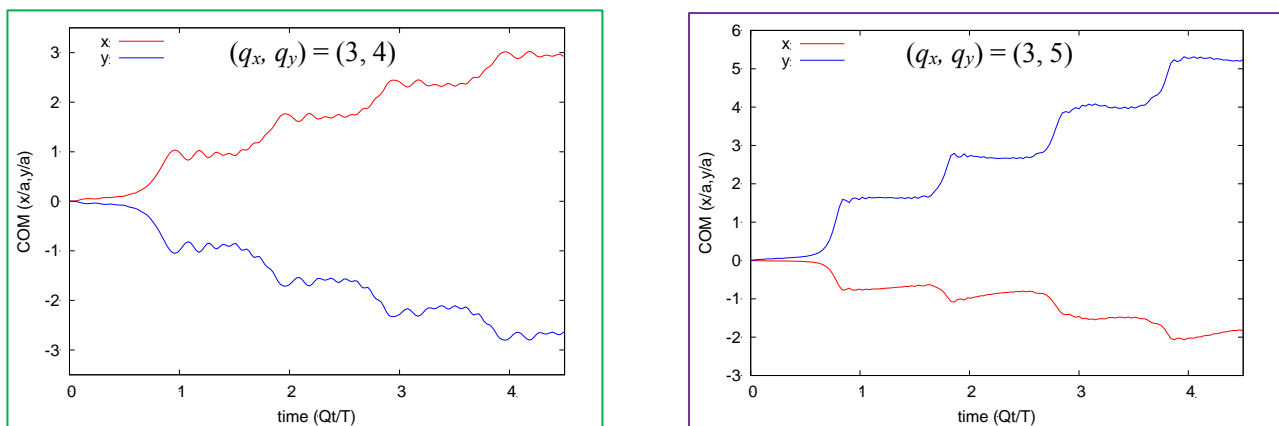
最近、京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻のメンバーからなる研究グループは、2次元正方光格子に斜めに超格子ポテンシャルを加えることで2次元サウレスポンプが実現可能な系を提案した。この系におけるポンプ量があるディオファントス方程式(式1)に従うことを明らかにした。また、調和トラップ下で時間依存シュレディンガー方程式を解くことで、トラップの影響を解析した。その結果、超格子ポテンシャルを動かす際の時間周期が適切な領域でポンプ量が量子化され、プラトー構造が現れることや、ポンプされる方向が異なる2つの領域が現れることを示した。この成果は、日本物理学会が発行する英文誌 *Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)* の2020年11月号に掲載された。

$$\frac{r}{Q} = s + u \frac{p_x}{q_x} + v \frac{p_y}{q_y}$$

式1 2次元サウレスポンプ系におけるディオファントス方程式。 $p_x/q_x, p_y/q_y$ はそれぞれ x, y 方向の超格子ポテンシャルの周期、整数 Q は q_x と q_y の最小公倍数、 r は下から何番目のバンドまで埋まっているかを表す整数である。この方程式の整数解 (s, u, v) について、 u が x 方向のポンプ量を、 v が y 方向のポンプ量を表す。

2次元正方格子に超格子ポテンシャルを斜めに導入することで、量子化されたポンピングが起これ、そのポンプ量はディオファントス方程式の解として表されることが示された。このトポロジカルな性質は、ハミルトニアンを一様な磁場を持つ3次元立方格子モデルに対応づけることで理解できる。また、

斜めに超格子を導入した連続体モデルが提案され、ベリー曲率からポンプ量が計算された。このモデルにおいても、平面波近似から同じディオファントス方程式が導出された。本研究では、さらに、時間依存シュレディンガー方程式を解くことで、調和トラップの効果調べられた。調和トラップ下では、超格子ポテンシャルの時間周期 T を変化させると、周期が小さすぎる場合にはポンピングが十分に行われず、逆に周期が大きすぎる場合には調和トラップの影響が大きくなりポンプ量の量子化が不明瞭になることが数値シミュレーションによって示された。しかし、周期がその中間領域にある場合に、ほぼ量子化されたポンピングが起こり、ポンプ量のプロットにプラトーが現れた。このポンプ量が前述のディオファントス方程式の解に対応していることが確認された(図 2)。また、超格子ポテンシャルの振幅に応じて、振幅が小さいときのホフスタッター領域と振幅が大きいきの整流領域の 2 つの領域が現れることが明らかになった。ホフスタッター領域ではポンプ量が上で確認したようにディオファントス方程式の解に対応するのに対し、整流領域では、ポンプされる方向が x 軸方向か y 軸方向に限定されていることが見出された。この 2 つの領域はクロスオーバーで結びついており、これがトラップの効果の特徴づけることが示された。



q_x	2	3	2	3	4	2	3	4	5	6
q_y	3	4	5	5	5	7	7	7	7	7
u	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-2	1
v	-1	-1	-2	2	-1	-3	-2	2	3	-1

図 2 超格子の周期によって特徴づけられる整数の組 (q_x, q_y) が $(3, 4)$ と $(3, 5)$ 、 $p_x=p_y=1$ の場合の、調和トラップ下における center of mass (COM) の x, y 方向の時間変化のシミュレーション結果。 q_y を 1 変えただけでポンプされる方向が大きく変わっていることが分かる。1 周期あたりの COM の変化量がディオファントス方程式の解によって与えられるものにほぼ一致している。下の表は $r=1$ のときのディオファントス方程式(式 1)の解。 (u, v) はポンプ量を表し、COM の変化量と対応する。

本研究では 2 次元系を 3 次元の量子ホール系に対応づけることで得られるトポロジカル相を扱ったが、最近では 4 次元量子ホール効果を 2 次元系で再現する系などの実験が行われている。さらなる拡張や応用についての今後の展開が期待される。

原論文(10月13日公開済)

[Two-Dimensional Thouless Pumping of Ultracold Fermions in Obliquely Introduced Optical Superlattice, Fuyuki Matsuda, Masaki Tezuka, and Norio Kawakami: J. Phys. Soc. Jpn. **89**, 114708 \(2020\).](#)

<情報提供：松田 冬樹（京都大学大学院理学研究科）
手塚 真樹（京都大学大学院理学研究科）
川上 則雄（京都大学大学院理学研究科） >