

# 戸田格子に潜むトポロジカルな側面 - 量子ポンプとの類似性が明らかになる

## [1] 要旨

戸田格子は 1967 年に戸田によって発見された非線形波動の可解模型である。その厳密解を求めるための数学的手法（逆散乱法）や模型の一般化（戸田場の方程式）等の研究は、我が国を中心として発展し、物理の広範囲に多大な影響を与えた。一方、1983 年の Thouless による量子ポンプ現象の発見は、今まさに大流行中のトポロジカル量子相研究の先駆けとなった。本論文は、戸田格子と量子ポンプ模型の類似性を見出し、その結果、戸田格子のトポロジカルな側面を明らかにした。これまでの逆散乱法を基本にした可解模型の研究に、新しくトポロジーの視点が加わることになる。非線形波動の特徴である孤立波（ソリトン）解の安定性の議論などがこの新しい視点から可能になるかもしれない。

## [2] 本文

戸田格子は、非線形波動の可解模型として広く知られている。1967 年に戸田によって最も基本的な周期解が与えられた。1974 年に Flaschka によって導入された Lax 方程式は、可積分性の証明だけではなく、厳密解を得る方法の一つとして重要である。この Lax 方程式は、個々の格子の運動方程式を行列形式で一気書き下したものであり、厳密なソリトン解を求めるための一般的な手法である逆散乱法の基本となっている。逆散乱法によって、あたかも粒子のように振る舞う孤立波(ソリトン)解を求めることができる。この格子ソリトン解は、電気回路で実験的に検証されている。また、1976 年には伊達・田中によって、Lax 行列の固有値を用いて、戸田格子の一般周期解が求められた。

一方、ポテンシャルを周期的・断熱的に動かすことによって量子力学的に粒子を移動させる量子ポンプの概念が 1983 年に Thouless によって導入され、最近になって冷却原子を用いて実験的に検証され注目を集めている。ポンプされる粒子数が、量子力学特有の波動関数から導かれるトポロジカル不変量 (Chern 数) によって与えられるという著しい性質を持つ。この Thouless ポンプ(と量子 Hall 効果)が、現在のトポロジカル量子相の研究の出発点であると言ってよい。

一見、無関係に思える戸田格子と Thouless ポンプは、それぞれ同じ 1 次元系だが、前者は古典系、後者は量子系、したがって前者は Newton の運動方程式、後者は Schrödinger 方程式に従う。ところが両者には接点がある。1993 年に初貝は、Lax 行列を用いた伊達・田中の周期解を求める手法から、量子 Hall 効果(とそれと同類の Thouless ポンプ)のバルク・エッジ対応、すなわち十分に大きな系(バルク)のトポロジカルな性質と境界(エッジ)を導入した際の束縛状態の 1 対 1 の関係という新概念を確立した (図 1)。では、逆にバルク・エッジ対応の視点から見ると、戸田格子の周期解はトポロジカルに非自明なのではないだろうか？

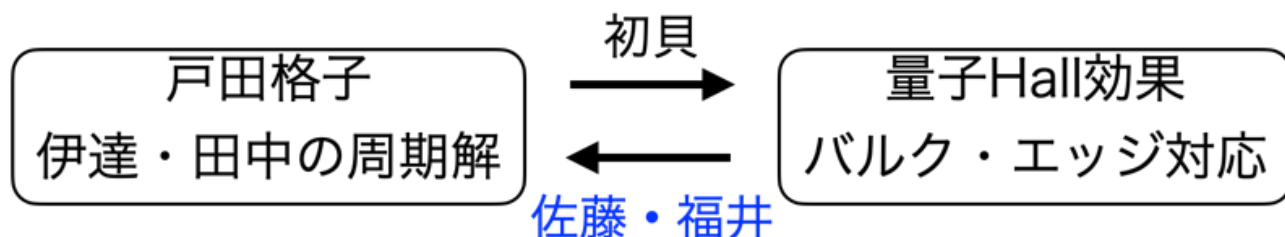


図 1. 戸田格子と量子 Hall 効果の関連性

茨城大学大学院の研究グループは、このような動機から戸田格子の周期解を見直した。伊達・田中は、Lax 行列の今で言うところのエッジ状態を用いて戸田格子の厳密解を構成したので、まずは、このエッジ状態の特徴、特に左右どちらの境界(エッジ)に局在するかを確認し、確かにこのエッジ状態がトポロジカルな起源を持ち得ることを明らかにした。さらに、バルク・エッジ対応の示唆のもと、戸田格子の周期解(バルクに対応)に関する Lax 行列固有状態の Chern 数を計算し、非自明な整数値を取ることを示した。これにより、戸田格子と Thouless ポンプはトポロジカルに同じ仲間として分類できることが分かる (図 2)。この成果は、JPSJ の 2023 年 7 月号に掲載された。

戸田格子を含む非線形波動の可解模型の研究は、ソリトン理論とでも呼ぶべき深淵で広大な数理論理の発展をもたらした。本研究により、そこに新たにトポロジーの視点加わることになる。ソリトンは方程式の非線形性と分散性の絶妙なバランスによって成り立っている。その安定性には戸田格子のもつトポロジカルな性質が関与している可能性が大きい。他の非線形波動の可解模型も同じくトポロジカルな性質を持つのであろうか？本研究により端緒が開かれた非線形波動とトポロジー。今後の研究に大いに期待される。

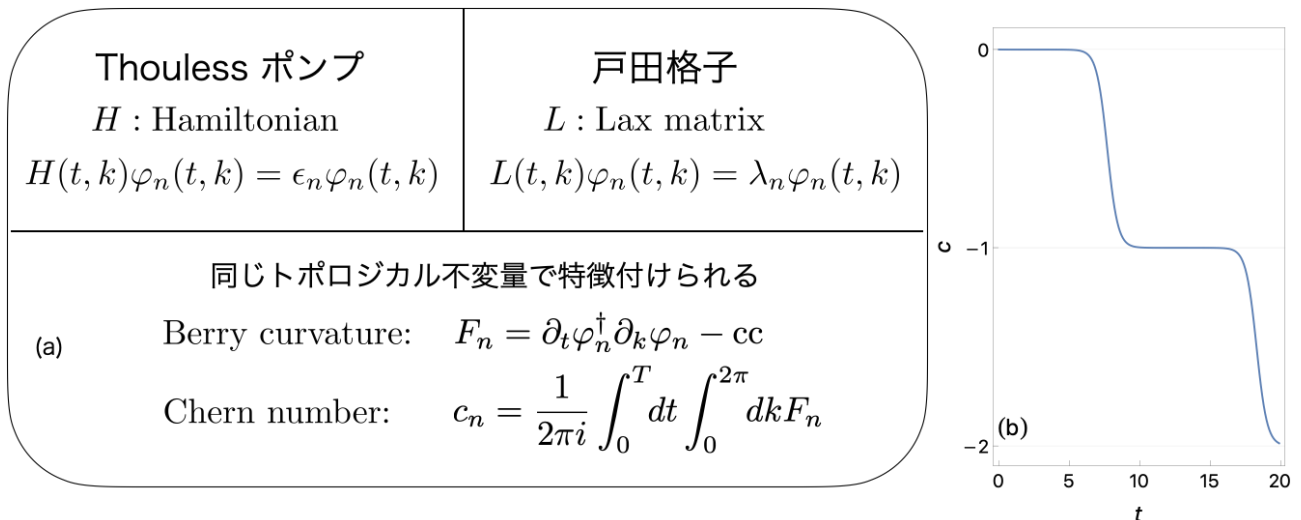


図 2. (a) Thouless ポンプと戸田格子の類似性の模式図. (b) 戸田格子の Lax 行列固有関数から計算した Berry curvature の積分で、 $t$  が戸田格子の周期  $T$  の時に Chern 数となる。戸田が最初に与えた周期解(cnoidal 波)に対応する。平坦部分の周期から  $T$  が読み取れ、それらの差より Chern 数が  $-1$  と分かる。

原論文 (2023 年 6 月 21 日公開済)

[Chern Numbers Associated with the Periodic Toda Lattice](#)

K. Sato and T. Fukui, J. Phys. Soc. Jpn. **92**, 073001 (2023).

< 情報提供 : 佐藤今日香 (茨城大学理工学)  
 福井隆裕 (茨城大学理工学研究科) >