

2次元空間での非線形波動の展開

[1]要旨

衝突前後で波形を変えず粒子的に振る舞う波動解はソリトンと呼ばれ、数理物理学の分野で盛んに研究されている。2次元空間で時間的に形状変化をするPeregrineソリトンもその中心課題である。そのような解を広く含む2次元 Mel'nikov方程式の解を解析的手法により調べ、lump（局在状態）の集団が示す新奇な振る舞いや、lumpと線状ソリトンの融合・分裂過程を明らかにするなど局在状態の時間発展に関する新たな知見を与えている。

[2]本文

19世紀の造船技師Scott-Russellは、運河のような浅い水で擾乱によって生じた水面の盛り上がりか形を変えることなく等速に進む現象を見つけ、孤立波(solitary wave)と名付けた。その現象を記述する非線形微分方程式が有名なKorteweg-de Vries(KdV)方程式である。一方、連成振動子に非線形項を付け加えることで、系のエルゴード性を調べようとしたFermi-Pasta-Ulam (FPU) 模型の数値計算においても、エルゴード的な振る舞いではなく再帰的な現象が見いだされ、衝突の前後で波形を変えず粒子的に振る舞う非線形波動解「ソリトン」の概念が導かれた。また、指数関数的な相互作用ポテンシャルをもつ戸田(Toda)格子もソリトン解の理解に大きな役割を果たした。これらの非線形波動の問題に対して、ソリトン解を系統的に扱う逆散乱法や、具体的なソリトン解を導出する広田の方法などが開発されており、数理物理学において重要な一分野を形成している。さらに、代表的なモデル方程式である非線形シュレーディンガー (NLS) 方程式での巨大波解の発見以来、時空において生成・消失を示すいわゆるPeregrineソリトンにも多くの注目が集まり研究が進められてきた。

最近、中国のHarbin Institute of TechnologyおよびChina University of Mining and Technologyのメンバーで構成した研究グループは、広田の方法に関してSchur多項式を一般化することで多様な非線形波動現象を見いだした。この成果は、日本物理学会が発行する英文誌Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)の 2024年2月号に掲載された。

本論文では、空間2次元の非線形波動現象を記述する Mel'nikov方程式を対象とし、いくつかのタイプの(半)有理解を広田の方法と Kadomtsev-Petviashvili(KP)-Toda 階層法を用いて調べた。その結果、一般化された高次のlump 解（空間に局在した解）を導出している。特に、系のパラメータによって3つのタイプ：暗い(dark)、四弁花 (four-petal)、および明るい(bright)lump状態が現れることを見出した。また、三角形に配置された複数のlump解が時間発展においてそれらの位置関係を変え、まず中央に集まったあと空間的な配置を逆転する興味深い振る舞い(図1)を発見し、Yabloskii-Vorob'ev 多項式とWronskian-Hermite 多項式の根の構造の関係性から説明を行っている。さらに、異なるタイプのlump解が融合・分裂する過程も解析的に構成した。本研究では、半有理解の導出により計算の困難さを軽減しているが、この手法は他の非局所で離散的なモデルに対しても適用でき、対応する解の構築が可能となる。今回、lump状態に関する多様な現象が明らかにされたことにより、これまでのこの分野で行われた多くの研究にさらなる展開の指針を与えると期待される。

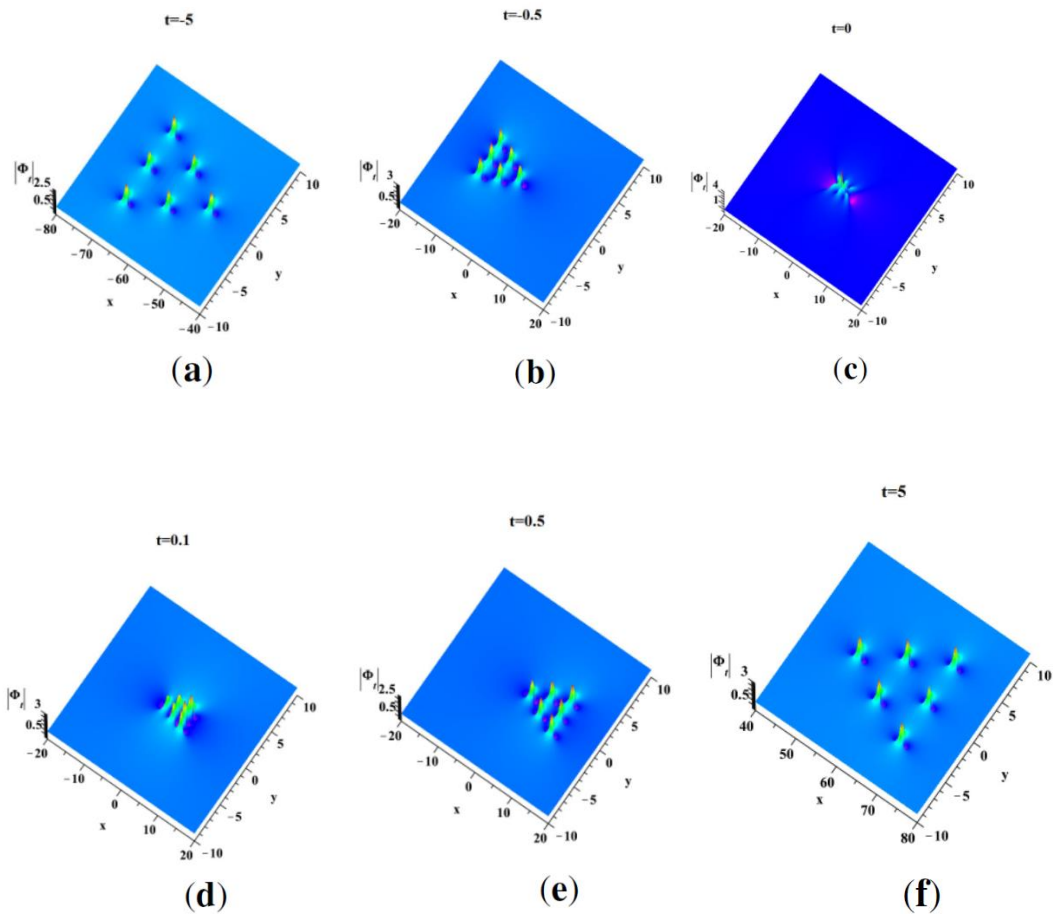


図1 三角形にlump解を配置した状態(a)からの時間発展。時間経過後の(f)では三角形の配置が逆転し、個々の局在状態はlump解の和でよく表すことができる。(原論文の図6より)

原論文 (2024年1月31日公開済)

General Multi-Breather, High-Order Lump and Semi-Rational Solutions of the (2 + 1)-Dimensional Mel'nikov Equation

X.-W. Yan, Y. Chen, X.-B. Wang, and S.-F. Tian, J. Phys. Soc. Jpn. **93**, 024006 (2024).

< 情報提供 : Xue-Wei Yan (School of Mathematics, Harbin Institute of Technology)

Yong Chen (School of Mathematics, Harbin Institute of Technology)

Xiu-Bin Wang (School of Mathematics, China University of Mining and Technology)

Shou-Fu Tian (School of Mathematics, China University of Mining and Technology)