典型例で学ぶ双対性

Keyword: 双対性（そうついせい，duality）

1. はじめに

理論物理とは，非常に大まかには，基礎的な自由度およびハミルトニアンを設定して，観測量を求める作業でしょう．実験を説明する理論を探すとは，観測量を再現するような自由度およびハミルトニアンを探すということですし，数理物理を研究している人は，基礎的自由度とハミルトニアンを与えたときに，観測量の巧い計算法を考えているわけです．以下，基礎的な自由度およびハミルトニアンの組のことを「理論」と呼ぶことにしましょう．異なる理論をAとBと二つ取りますと，観測量も通常異なりますが，AとBをうまく選ぶと，観測量が等しくなることがあります．このとき，理論Aと理論Bは双対である，と呼ばれます．その典型は，何といっても二次元イジング模型のKramers-Wannier双対性[1)]ですから，それを思い出すことからこの記事を始めましょう．

2. 二次元イジング模型の双対性

二次元イジング模型は，格子点上に±1を取るスピン変数σがあり，分配関数は全ての配位$\{\sigma\}$について

$$Z(K)=\sum_{\{\sigma\}}\prod_{\text{辺}}\mathrm{e}^{K\sigma\sigma'} \tag{1}$$

とする模型です．ここで，内側の積は格子上の全ての隣接点を繋ぐ辺について取ります．辺を介して隣り合うスピンが同じとき$\sigma\sigma'=1$よりも，スピンが異なるとき$\sigma\sigma'=-1$のときの実現確率がe^{-2K}倍だけ小さいというものです．Kがとても大きければ，これによってスピンは一方向に揃いますが，Kがとても小さければ，スピンは乱雑になり，相転移を記述する模型になっているのでした．図1(a)ではσの配位の一例を＋を白丸，－を灰色の丸で記しました．さて，$\sigma\sigma'=\pm1$ですから，

$$\mathrm{e}^{K\sigma\sigma'}=\cosh K\sum_{t=0,1}(\sigma\sigma'\tanh K)^t \tag{2}$$

が成り立ちます．よって，

$$Z(K)=(\cosh K)^N\sum_{\{\sigma\}}\sum_{\{t\}}\prod_{\text{辺}}(\sigma\sigma'\tanh K)^t \tag{3}$$

です．ここで$\{t\}$は各辺に0, 1が割り振られたものです．図1(b)には$t=1$であるところを太線で示しました．さて

$$\sum_{\sigma=\pm1}\sigma^{1,3,5,\cdots}=0,\quad \sum_{\sigma=\pm1}\sigma^{2,4,6,\cdots}=2 \tag{4}$$

を使うと，先にスピン変数σについて和が取れ，

$$Z(K)=(2\cosh K)^N\sum_{\text{閉曲線をなす}\{t\}}(\tanh K)^L \tag{5}$$

となります．但し和は太線のなす閉曲線について取り，Lは閉曲線の長さです（図1(c)）．閉曲線ですから，その中は－1，外は＋1という規則でスピン変数μを割り振ることができます（図1(d)）．μは，もとのスピン変数σ四つのなす正方形の中に書かれていることに気をつけてください．各太線は隣り合うμ, μ'で$\mu\mu'=-1$となるものに対応することを使うと，

$$Z(K)=(2\cosh K)^N\sum_{\{\mu\}}\prod_{\text{辺}'}(\tanh K)^{(1-\mu\mu')/2} \tag{6}$$

$$=(2\cosh K\sinh K)^{N/2}\sum_{\{\mu\}}\prod_{\text{辺}'}(\tanh K)^{-\mu\mu'/2} \tag{7}$$

となります．ここで積はμ同士をつなぐ全ての辺について取ります．さて，式(1)と比較すると，$\mathrm{e}^{-2K'}=\tanh K$で$K'$を導入すれば

$$Z(K)=(\sinh 2K)^{N/2}Z(K') \tag{8}$$

がわかりました．KとK'の関係は，もっと対称的に

$$\sinh 2K\sinh 2K'=1 \tag{9}$$

とも書けます．これより，$\sinh 2K=1$は特殊な点であろうと予想がつきますが，実際に相転移点になることが知られています．

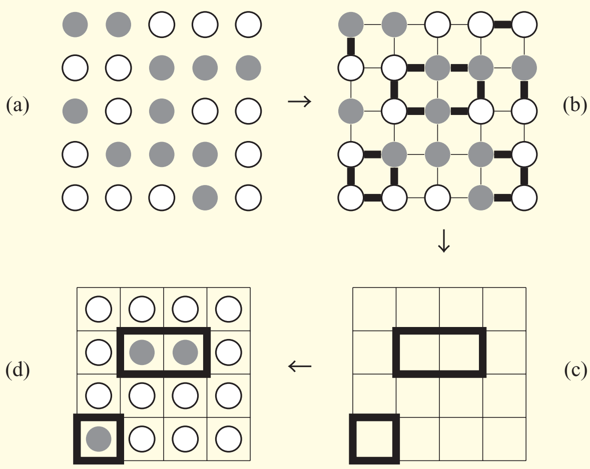

図1　イジング模型の双対性．

3. 双対性の特徴

さて，前節の例から，双対性において特徴的な点を三つ見ていきましょう．まず，イジング模型の双対性の場合は，一見全く同じ模型で結合定数Kだけが変わりましたが，こ

れは偶然そうなったのであって，もとのスピン変数σと，双対なスピン変数μは異なる格子上に住んでいることを思えば，**「双対性とは，別個の二つの模型が同じ観測量を与える現象である」**と思うべきでしょう．

次に，σで書いたハミルトニアン$-K\sum\sigma\sigma'$もμで書いたハミルトニアン$-K'\sum\mu\mu'$も共に局所的な相互作用ですが，σとμとの関係は簡単ではありません．実際，式(3)から式(5)にかけてσについて足しあげてはじめて，辺の上の自由度$\{t\}$が閉曲線をなすことになり，閉曲線になるからこそ，μが決められます．σの足しあげは，量子力学においては経路積分表示での量子化に相当しますから，**「量子化してはじめて双対性がある」**と言えます．また，式(6)でtからμを求める際は，離散化された微分方程式を積分するようなものですから，**「双対な記述にあらわれる自由度は，もとの自由度と非局所的である」**と言えるでしょう．

また，KとK'との関係(9)から，もとの結合定数Kがとても小さければ，双対の結合定数K'はとても大きくなります．**「双対性は結合定数の強弱を入れ替えることがある」**というわけです．理論物理の基本的な手法の一つは小さな結合定数に関する摂動論ですから，その立場からは強結合を弱結合にうつせるのは不思議なことです．

4.　四次元ゲージ理論および超弦理論の双対性

さて，双対性を探すには，観測量が同じになるような二つ以上の異なる理論を探さねばなりませんが，その為にはまず，考えたい理論に対して，十分良く観測量が計算できなければ始まりません．ですから，双対性が知られている系は，理論が簡単で，観測量の計算法がある程度判っている場合に限られます．四次元の場の理論では次のものが典型例です．

相対論的な場の理論で，SO(3)ゲージ場に，3表現のワイルフェルミオンを四つ，3表現の実スカラー場を六つあるものを考えます．理論のポテンシャルおよび湯川相互作用をゲージ場の結合定数gの関数として適切に調整すると，この系は$\mathcal{N}=4$超対称性という高い対称性をもちますが，結合定数がgのときの観測量は，結合定数が$g'=1/g$としてさらに磁荷と電荷を入れ替えた観測量と等価になると信じられており，著者にちなみMontonen-Oliveの双対性[2]と呼ばれます．まず$g'=1/g$なので，**「双対性は結合定数の強弱を入れ替える」**．電荷をもつ粒子は場の量子で記述されますが，磁荷をもつ粒子は場の非自明な古典配位に対応し，これらが交換されるので，**「量子化してはじめて双対性がある」**．電場と磁場の入れ替えはベクトルポテンシャルには非局所的に作用するので，**「双対な自由度は，もとの自由度と非局所的である」**．この双対性は，四次元$\mathcal{N}=4$超対称ゲージ理論をIIB型超弦理論のブレーン上の理論として実現すれば，IIB型超弦理論全体のS双対性と呼ばれる双対性の帰結であることも知られています．

但し，四次元超対称ゲージ理論や超弦理論で双対性が知られているといっても，まだ式変形によって完全に等価性が示せているわけではありません．計算できた限りの観測量が一致するので，未だ計算できない量についてもおそらく一致しているのだろうと思われているということです．

5.　おわりに

双対性がしばしば我々にとって驚きであるのは，全く異なるように見える理論から出発して，同じ観測量が得られるからです．双対性は簡単な系においてしか確立していませんが，現実にある系に対しても，同じ観測量を説明しうる理論が一通りであるとは限らないでしょう．これは，実験結果を説明する理論に，双対なものがいくつもあっても良い，ということで，双対性は，物理学者が伝統的に陥りがちである還元主義において，還元結果は唯一であろうという思い込みに既に反例を与えているのではないかと思います．また，一方で，双対な二つの理論は全く異なるように「見える」とは言っても，取り出せる観測量は全く一緒ですから，物理系としては同じです．「双対性」などとことさら強調したくなるというのは，双対な二つの理論が同じに見える程度まで我々の理解が進んでいない，という我々の至らなさを示していると筆者は自省している次第です．量子力学の初期には，行列力学と波動力学の同等性，所謂「波と粒子の双対性」も驚きであったわけですが，今やそれは当たり前なわけですから，現今の双対性も，驚きでなくなっているような日が遠くないことを祈って筆をおきます．

参考文献

1) H. A. Kramers and G. H. Wannier: Phys. Rev. **60** (1941) 252.
2) C. Montonen and D. I. Olive: Phys. Lett. B **72** (1977) 117.

立川裕二〈東京大学理学部物理学科　〉

(2013年10月2日原稿受付)