同期現象研究の広がり

Keyword: 同期現象，引き込み現象

1.　同期現象とは？

振動子（群）が何らかの相互作用や周期外力の作用によって振動タイミングを揃える現象は，同期（synchronization），あるいは引き込み（entrainment）と呼ばれる．[1]

まず，ロンドンのミレニアム橋での事件を紹介したい．[2] これはテムズ川に架けられた歩行者専用の橋で，2000年の開通日にたくさんの人が訪れた．そのときの人の数は想定内であったのだが，設計上は起こらないと考えられていた強い横揺れが生じ，それは歩行が困難になるほどの危険なレベルであった．橋はすぐに封鎖され，補修工事が行われることになった．

何が想定外であったのだろうか？　設計者は，各歩行者がランダムに足を運ぶと想定していた．しかし実際は，たくさんの歩行者が，右足，左足と歩調を合わせて，それによって強い横揺れが生じた．歩行者は決して悪ふざけでこのようなことをしたのではない．橋がいったん揺れだすと，それが右に傾いたときには，バランスを取るために右足を出さざるをえない．そして左に傾けば左足をという具合に，自然と橋の揺れに合わせて歩くことになる．これを集団で行えば橋はますます揺れる．ミレニアム橋ではそのようにして歩調はますます揃い，揺れがますます増大するという悪循環に陥ったのである．この様子はyoutubeに映像があるので興味のある方は“London Millenium Bridge opening”などと検索して見ていただきたい．また，たいへん似た現象をメトロノームを使って簡単に再現することができるのでご覧いただきたい（http://youtu.be/ZMApCadGSt0）．

ミレニアム橋での事件には同期と共鳴の双方が関わっている．これらは異なる概念である．共鳴とは，振動子がその固有振動数と近い振動数を持つ周期外力を受けたときに振動振幅が劇的に増大する現象である．橋が強く揺れたのは，集団の歩行が強い周期外力として働き，橋がそれに共鳴したためであると考えられる．一方，冒頭で説明したとおり，同期は振動タイミング（つまり位相）の秩序化現象のことである．ミレニアム橋では集団の歩行が同期したために，橋を揺らすような強い周期外力が生まれた．

歩行者はそもそも固有には異なる周期で歩くので，必ずしも同期が起こるとは限らない．実際，橋の設計者はその可能性を見落とした．同期は歩行に限らず，様々な系で見られる．ばらばらの固有周期を持つ振動子集団の同期は，理論的にはどのように扱えるのか．本稿では，まず同期の数理的研究の草分けである蔵本モデルについて簡単に解説する．そして実験研究を含めた同期の研究に関する昨今の動向を紹介する．

2.　同期の理論

多くの振動現象は常微分方程式で記述できる．振動子i（$i=1, \cdots, N$）の状態変数を$\boldsymbol{x}_i(t)$（太文字はベクトルを表す）とし，その発展方程式を

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i, p_i) \tag{1}$$

とする．ここで$\boldsymbol{f}_i$は何らかの関数，p_iは摂動である．振動子間の相互作用はp_iを介して起こるとする．橋の上の歩行現象のように，すべての振動子がすべてに一様に影響を与える大域結合の場合は$p_i=\epsilon\sum_{j=1}^{N}q(\boldsymbol{x}_j)$とする．ここで$\epsilon$は相互作用の大きさで，$q$は何らかの関数である．

ここで，$\epsilon=0$としたとき，$\boldsymbol{x}_i(t)$は一般的な初期条件に対し$t\to\infty$である周期解に漸近すると仮定する．このような周期解はリミットサイクルと呼ばれ，これはエネルギー的に開いた系で典型的に現れる振動である．リミットサイクル振動を仮定すると，ϵが十分小さいときは，各振動子の軌道$\boldsymbol{x}_i(t)$は相互作用のないときの周期軌道からあまりずれない．このとき，各振動子の状態は振動の位相$\phi_i(t)$（長さ2πの円環上で定義）のみによってよく特定できる．式(1)を変数変換し，さらにϵを小さいことを利用した近似を用いると，ϕ_iの発展方程式

$$\frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}=\omega_i+\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}h(\phi_i-\phi_j) \tag{2}$$

が得られる．[3, 5] ここで，便利のため$\epsilon=K/N$とおいた．Kも結合強度と呼ぶ．また，hは2π周期関数で，その関数形は$\boldsymbol{f}_i$やqが与えられれば，（多くの場合は数値的に）計算することができる．ω_iは固有振動数と呼ばれ，$2\pi/\omega_i$は相互作用がないときの固有周期に一致する．相互作用として最近接結合や複雑なネットワークも考えることができ，その場合はhをh_{ij}と置き換える．

なお，リミットサイクルではなく，調和振動子などのエネルギー保存系で現れる振動に対しては，位相のみで閉じた方程式は一般には導出できない．これは，どんなに弱い摂動でもエネルギーが時間変化し，それに伴って軌道がもとの周期解から遠く離れてしまうためである．

蔵本由紀は1975年に式(2)を用いて，同期が相転移的に起こることを初めて示した．蔵本は，$h(\phi)=-\sin\phi$とおき，さらに，固有振動数ω_iをガウス関数やローレンツ関数（図1(a)）といった適当な分布関数$g(\omega)$を持つ乱数とした．これは蔵本モデルと呼ばれている．$h(\phi)=-\sin\phi$で与えら

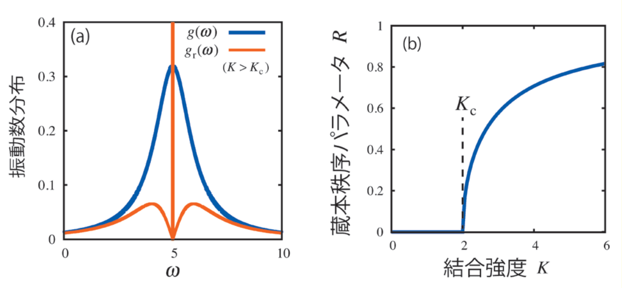

図1　蔵本モデルにおける同期転移．(a) 振動数分布．青線が固有振動数分布 $g(\omega)$ で赤線が $K=2.5>K_c$ のときの振動数分布 $g_r(\omega)$ である．(b) 同期の秩序パラメータ R．$K>2$ で同期が起こる．

れる相互作用は引力的で，同期を促す．つまり，たとえば振動子が2つのみのときで ϕ_1 が ϕ_2 より少し小さいとすると，$\sin(\phi_2-\phi_1)>0$ なので振動子1の振動数 $\mathrm{d}\phi_1/\mathrm{d}t$ は増加する．同様に振動数 $\mathrm{d}\phi_2/\mathrm{d}t$ は減少するので，ϕ_1 と ϕ_2 には引力が働いている．一方，固有振動数のばらつきによって，位相はばらばらになる傾向を持つ．これらの相反する効果のバランス次第で，同期か非同期かが決まる．

蔵本モデルは $N\to\infty$ かつ $t\to\infty$ とすると様々な量を解析的に求めることができる．特に重要な量が蔵本秩序パラメータ $R=|\sum_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}|/N$ と振動数分布 $g_r(\omega)$ である．R は XY モデルにおける磁化と同じ量であり，$R=0$ が無秩序状態，$R=1$ が完全に位相の揃った状態に対応する．分布 $g_r(\omega)$ は $\mathrm{d}\phi_i/\mathrm{d}t$ の長時間平均の分布で，相互作用による振動数の変化を捉えることができる．

固有振動数の分布 $g(\omega)$ を分散 $\gamma=1$ のローレンツ関数とする（図1(a)）．このモデルの挙動は $g(\omega)$ の平均値によらないのだが，ここでは5としてある．K が小さいときは $R=0$，つまり，位相が一様分布している完全な無秩序状態が得られる（図1(b)）．しかし，K が臨界値 $K_c=2\gamma$ を超えると $R>0$ となり，なんらかの秩序化が起こっている．このとき振動数分布にも臨界値 K_c を境に定性的な変化が現れる．K が小さいときは $g_r(\omega)=g(\omega)$ であることが示せる．このとき各振動子の振動数は固有振動数に完全に一致する．一方，$K>K_c$ では，平均振動数 $\omega=5$ のところにデルタ関数によって表されるピークが出現する（図1(a)）．つまり，平均振動数に近い固有振動数を持つ振動子同士が，振動数を完全に一致させる．蔵本モデルに代表されるように，同期はある臨界的なパラメータ値を境に起こるのが一般的である．

蔵本モデルが提案されてすでに40年近くたつが，今も未解決問題や拡張に関して活発に研究がなされ，近年にもいくつかのブレークスルーがあった．例えば，同期状態の安定性は未解決問題であったのが，斬新なアプローチによって近年証明された．[6] 同期の基礎理論から最近の発展までは文献4, 5に詳しい．

3.　同期現象の広がり

同期は時間的な秩序形成現象と言えるが，パターン形成のような空間的秩序形成とも密接に絡み合う．化学反応では，条件によっては周期的に反応が進むものがあり，同心円構造を持つ進行波や，回転する螺旋パターンがしばしば形成される（http://youtu.be/PnOy1fSxBdI）．また，化学乱流と呼ばれる時空間的に不規則なパターン（時空カオス）が生まれることもある．

また，同期は様々な生命機能において重要な役割を果たしている．例えば，我々の持つ24時間の体内時計，いわゆる概日リズムが挙げられる．概日リズムは，脳にある視交叉上核という数万の神経細胞の集合体が統率している．視交叉上核を構成する神経細胞では各細胞内で時計遺伝子と呼ばれる一群の遺伝子の発現制御ループが作動しており，これによって一群のタンパク質がほぼ24時間周期で増減し，この増減は組織全体で見事に同期している．[5] つい最近，マウスの実験によって，視交叉上核で働く神経伝達物質の1つを阻害すると時差ぼけがなくなることが発見され，時差ぼけの原因とその消失のメカニズムは，視交叉上核を位相方程式によってモデル化することによって説明された．[7]

同期は，現象の壮観さや美しさに加え，生命機能とも深く関連する大変魅力的な研究話題である．特に生命現象では，細胞分化，細胞分裂，体節形成などの発生過程において，遺伝子発現の振動と同期が重要な役割を担っていることが明らかになりつつあり，数理物理学的な視点がますます求められている．専門的な実験研究と横断的視点を持つ理論研究の協働が，今後の発展に欠かせない．

参考文献

1）A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths 著，徳田　功訳：『同期理論の基礎と応用；数理科学，化学，生命科学から工学まで』（丸善，2009）．
2）S. H. Strogatz, *et al.*: Nature **438**（2005）43.
3）Y. Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*（Springer, New York, 1984）.
4）蔵本由紀，河村洋史：『同期現象の数理；位相記述によるアプローチ』（培風館，2010）．
5）郡　宏，森田善久：『生物リズムと力学系』（共立出版，2011）．
6）H. Chiba: Ergotic Theory and Dynamical Systems（2013）1.
7）Y. Yamaguchi, *et al.*: Science **342**（2013）85.

郡　宏〈お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科〉

（2013年10月5日原稿受付）