ホログラフィー原理
—ブラックホールが指し示す量子重力への道筋—

Keyword: ホログラフィー原理

一般相対論によると，ブラックホールの地平面の内側からは，光を含めて何も脱出できない．とすると，ブラックホールに落ちた物体のエントロピーは失われるのだろうか．このような疑問をきっかけとした1970年代のBekenstein，Hawkingらの研究[1, 2]により，ブラックホール自体がエントロピーを持った熱力学的物体であると考えられるようになった．また，ブラックホールからの寄与を含めたエントロピーの総和が減少しない，という「一般化された熱力学第2法則」が提案された．ブラックホールのエントロピーは，事象の地平面の表面積に比例する．その自然な帰結として，量子重力の指導原理とみなされているホログラフィー原理[3]が提案された．本稿では，ホログラフィー原理の生まれた経緯と現状を解説する．

1.　ブラックホールの熱力学

ブラックホールは，重い星の重力崩壊等により形成されるが，どのような物質から形成されたかによらず，質量，角運動量，電荷のみで特徴づけられる（「ブラックホール無毛定理」）．まずこの事実が，ブラックホールと，少数の巨視的物理量で特徴づけられる熱力学的物体の類似性を示している．

3次元空間におけるブラックホールは，事象の地平面の面積Aに比例したエントロピー

$$S=\frac{A}{4\ell_{\mathrm{P}}^2} \tag{1}$$

を持つと考えられている．ここで，プランク長$\ell_{\mathrm{P}}=\sqrt{G\hbar/c^3}\simeq 10^{-35}$ m（Gはニュートン定数）は，量子重力の効果が重要になると考えられるスケールである．ブラックホールが物質を吸い込むのに伴い地平面の面積が増大することや，複数のブラックホールが合体してできたブラックホールの地平面の面積が合体前のものの和以上になるという事実は，表面積をエントロピーに関係づけることの妥当性を示唆している．*1

熱力学的物体は，物質を吸収するだけでなく放出することができなければならないが，Hawking[2]により，ブラックホールは熱的なスペクトルを持った量子的輻射を放出していることが明らかにされた．今日では，この輻射は様々な見方で理解されている．例えば，一様な加速度で運動している観測者が輻射を観測すること（Unruh効果）が知られているが，ブラックホール外部にとどまる観測者は加速度を持っており，そのために輻射を観測しているということもできる．

質量MのSchwarzschildブラックホール（回転していないブラックホール）を考えると，地平面の半径*2は$R=2GM/c^2$，面積$A=4\pi R^2$，温度$T=\hbar c/(4\pi R)$となり，エネルギーを$E=Mc^2$として，熱力学第1法則$\mathrm{d}E=T\mathrm{d}S$が確かに成り立つ．[1] ブラックホールのエントロピーや温度は量子的な量であり，上の式から得られる値が観測に影響するとは考えにくいが，理論的には大きな意味がある．

ブラックホールのエントロピーが何の状態数を表しているかは，量子重力の理論によらないと分からない．しかし，ブラックホールがエントロピーを持つなら，熱力学第2法則は，ブラックホールの寄与を含めたエントロピーは減少しない，という形に一般化すべきだろう．Bekensteinは，一般化された第2法則を支持する以下のような興味深い議論を行っている．可能な限り小さなエントロピーを持った物質として，地平面半径程度の波長を持った光子（エネルギー$\hbar c/R$）を考え，ブラックホールがそれを吸い込んだことによるエントロピー（式(1)）の増加を調べると，1のオーダー（すなわちほぼ最小単位）であることが分かる．

2.　ホログラフィー原理

一般化された第2法則が成り立つならば，空間領域に存在できるエントロピーには上限があり，その領域の表面積Aを用いて式(1)で与えられるはずである．これは，その領域の物質が重力崩壊してできるブラックホールのエントロピーと比較すれば明らかである．重力崩壊により，表面積は小さくなるが，エントロピーは減少しないからである．本稿では簡単のため球対称な場合を考えているが，一般の場合のエントロピーの上限も定式化されている．[4]

示量性の量であるエントロピーが，領域の体積ではなく表面積によって制限されるというのは不思議である．ただ，これには，エントロピー（状態数）を求めるにはエネルギーのカットオフを導入する必要があり，エネルギーを最も密に詰め込んだ物体であるブラックホールについて，上で触れたようにエネルギー（あるいは質量M）とサイズRの間に特定の関係があるという事情が関係している．

一般化された第2法則を踏まえて，'t HooftとSusskind[3]により，「量子重力理論では，d次元空間は，その境界（表面）に位置する$d-1$次元面上の自由度を用いて記述され，その自由度の数はプランク単位で測った面積（の4倍）あたり1つである」という大胆な提案がなされた．3次元の立体

的な情報を2次元面に記録する技法であるホログラフィーになぞらえて，この仮説をホログラフィー原理という．

ブラックホールは量子的輻射を放出して最終的に蒸発すると考えられており，その際，ブラックホールを構成した物質の情報が保存されるのか問題になっているが，ホログラフィー原理により情報の保存が可能になると考えられている．

3.　ホログラフィー原理の実現：AdS/CFT対応

空間の表面に位置する基本的自由度とは何だろうか．超弦理論によると，その候補はDブレーンである．超弦理論において重力相互作用は閉じた弦の伝播によって表されるが，理論には，弦の端点が位置することのできるソリトン的物体，Dブレーンが存在する．Dブレーンは，そのN体系が$N\times N$行列を用いて表され$SU(N)$ゲージ対称性を持つという，通常の物質とは大きく異なる性質を持っている．[*3]

Dブレーンを基本的自由度として超弦理論が再構成できることが提案されており，その典型例がAdS/CFT（Anti de Sitter/Conformal Field Theory）対応である．[5] 例えば，D3ブレーン（3次元的な広がりを持ったDブレーン）のN体系は，$(4+1)$次元反ドジッター（AdS）空間と5次元球面の直積という時空をつくる．その時空の上の超弦理論は，D3ブレーンの世界面を記述する$(3+1)$次元$SU(N)$ゲージ理論と等価だと考えられている．このゲージ理論は，重力を含まない通常の場の量子論である．$N\to\infty$の極限が古典的重力理論に対応すると考えられている．

このゲージ理論は，ホログラフィー原理から要求される数の自由度を持っている．[6] ただし，AdS空間は無限の広がりを持っており，場の量子論は無限に小さいスケールに自由度を持つので，自由度を数えるには両者を正則化する必要がある．その際，ゲージ理論が空間の境界（無限遠）において定義されており，AdSの動径方向がゲージ理論のエネルギースケールに対応するという事実が重要となる．AdSの曲率半径をR，境界方向をx^μ，動径方向を$z(\geq 0)$（$z=0$が境界）として，計量を

$$ds^2 = R^2\left(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2\right)/z^2 \qquad (2)$$

で表すと，ゲージ理論の近距離カットオフ$\Delta x>\delta$は，動径zに対する長距離カットオフ$z>\delta$に相当する．[*4] 以下では数係数を無視するとすると，このカットオフのもとでのAdS空間の表面積は$A=R^3/\delta^3$となり，超弦理論から導かれる$(4+1)$次元プランクスケールℓ_Pに関する関係式（$R^3=N^2\ell_P^3$）を用いると，ホログラフィー原理から要請されるエントロピーは$S=N^2/\delta^3$となる．[*5] $1/\delta^3$は，近距離カットオフδを持った場の理論における格子点の数にあたるので，このエントロピーは，確かに，ゲージ理論がN^2個の成分を持った行列を変数としていることと合致している．

4.　ホログラフィー原理の展開と課題

上の議論は，単位AdS面積（プランク面積のN^2倍）あたりN^2個の自由度が存在するという意味で数勘定として正しいが，完全に満足できない点としてしばしば強調されるのは，AdS面積より小さいプランク面積の領域で何が起こっているかが直接明らかになったわけではないという点である．それを明らかにするには，行列で表されるDブレーン特有の性質の理解が必要になる．AdSではない，漸近的平坦な時空，あるいは，漸近的性質が明らかでない宇宙論的時空に対するホログラフィー的記述には，行列が本質的となる．[*6] また，ブラックホールで情報が蓄積されるメカニズムにも行列が重要な役割を果たすと考えられる．[*7]

本稿では，ホログラフィー原理の量子重力の構成における意義に重点を置いたが，ホログラフィー原理により様々な量子多体系（ゲージ理論やその他の物性系）の性質が重力理論（超弦理論とその低エネルギー極限）を用いて解析可能になるという側面も重要である．それについては，高柳氏によるAdS/CFT対応の紹介記事[5]をご覧頂きたい．

参考文献

1）J. D. Bekenstein: Phys. Rev. D **7**（1973）2333; J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking: Commun. Math. Phys. **31**（1973）161.
2）S. W. Hawking: Commun. Math. Phys. **43**（1975）199［Erratum **46**（1976）206］.
3）G. 't Hooft: arXiv: gr-qc/9310026; L. Susskind: J. Math. Phys. **36**（1995）6377.
4）R. Bousso: Rev. Mod. Phys. **74**（2002）825.
5）高柳　匡：日本物理学会誌 **69**（2014）72.
6）L. Susskind and E. Witten: arXiv: hep-th/9805114.
7）Y. Sekino and L. Susskind: JHEP **0810**（2008）065.
8）T. Banks, *et al.*: Phys. Rev. D **55**（1997）511; N. Ishibashi, *et al.*: Nucl. Phys. B **498**（1997）467.

関野恭弘〈拓殖大学工学部基礎教育系列　〉

（2015年4月1日原稿受付）

*1 回転しているブラックホールに粒子を打ち込んで加速させる「Penrose過程」等，ブラックホールからエネルギー（質量）を抽出するプロセスは古典論の範疇で存在するが，その場合も表面積は減少しない．また，ブラックホールの合体前後で，重力波の放出によるエネルギーの損失により質量の和は減少しうるが，面積の和は減少しない．

*2 これは，ニュートン力学における無限遠への脱出速度の公式$mv^2/2=GMm/R$で$v=c$とおいたものと（偶然）一致する．

*3 行列の対角要素がDブレーンの位置を表し，非対角要素はDブレーン間をつなぐ弦を表す．$SU(N)$変換で結びつく配位は同一視される．

*4 これは，Δxだけ離れた境界上の2点を結ぶ測地線が，AdSの内部に$z=\Delta x/2$まで進入することなどから理解できる．

*5 $(4+1)$次元時空を考えているので，表面積はR^3に比例し，式(1)の分母はℓ_P^3で置き換えられる．なお，表面積の計算には本当はAdSの境界が球面として表される座標系を使ったほうがよい．

*6 行列を基本的自由度とする量子重力の定式化については，文献8参照．

*7 ブラックホールの地平面では情報が通常の場の理論より速く拡散すると考えられているが，行列模型はその性質を持つと期待されている．[7]