数え上げ不変量の母関数から見えてくるもの

Keyword: 位相的場の量子論

1. 分配関数と位相不変量（公理論的観点）

場の量子論は公理論的にとらえると，時空の次元や計量，理論の対称性，粒子の種類や表現といったデータをインプットとするとき，そのアウトプットとして**分配関数**（相関関数の母関数）を計算する処方箋ということができます．重要な点は，この処方箋が対称性や無矛盾性から従う，しかるべき性質（公理）を満たしていることです．現在，広く用いられている径路積分法では作用（ラグランジアン密度とそれを積分する時空のデータ）と径路積分の測度がインプットですが，公理論的観点からは分配関数が計算できれば，必ずしもラグランジアン密度の存在を仮定する必要はないことに注意します．

一方，**位相不変量**は同様に幾何学的対象をインプット，整数や多項式をアウトプットとする対応で，インプットの連続的変形という対称性の下でアウトプットが不変なものということができます．古典的な位相不変量であるオイラー標数や写像の巻き付き数は整数値ですが，結び目の量子不変量であるジョーンズ多項式は多項式不変量の例です．最近の幾何学ではさらに進んでベクトル空間や複体（ベクトル空間の列とその間の線型写像の組）をアウトプットとするホモロジー的（圏論的）不変量も盛んに研究されています．

2. 位相的相とエネルギー運動量テンソル

素粒子論や統計力学において，理論がどのような相にあるかは相関関数の振る舞いによって特徴付けられると考えられています．自発的対称性の破れ，クォークの閉じ込めといった問題が代表的な例として挙げられます．このような観点から理論に現れる相関関数がすべて位相不変量となる理論を**位相的場の量子論**と呼びます．これは1988年にE. Wittenが量子重力理論における一般共変性が全く破れていない相（位相的相）を記述する理論は，どうあるべきかという問いに対する一つの答えとして提案した理論です．[1)]例えば2点関数 $\langle \phi_a(x)\phi_b(y)\rangle$ は2点間の距離 $|x-y|$ の関数と期待されますが，距離を測るために特定の計量を固定した時点で一般共変性が破れてしまいます．仮にあらゆる可能な背景計量に関する径路積分が実行できたとすれば一般共変性が回復できると期待されます．この意味で位相的理論は，計量に関する径路積分を実行した後の“有効理論”と見ることもできます．相関関数が位相不変量となることの物理的判定法は，それらが背景計量に依存するかどうかです．とくにエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の（任意の）期待値がゼロになることを，理論が位相的相にあるかどうかの判定条件とすることができます．

3. チャーン・サイモンズ理論と量子不変量

背景計量に依らないラグランジアンにより定義される理論は位相的場の量子論になると予想されます．代表的な例が3次元多様体 M 上の（非可換）ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ に対するチャーン・サイモンズ理論です．その作用は

$$S_{\mathrm{CS}}=\frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{d}^3x\,\epsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\mu^a\partial_\nu A_\lambda^a+\frac{2}{3}f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c\right) \tag{1}$$

で与えられます．ここで $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$ は完全反対称テンソル，f^{abc} はゲージ群のリー代数の構造定数です．作用のゲージ不変性からパラメータ k は整数にとる必要があります．ゲージ場に対する通常の作用（運動項）S_{YM} と対照的に作用 S_{CS} には多様体 M の計量が全く現れていません．運動項に位相的なチャーン・サイモンズ項を加えた作用 $S_{\mathrm{YM}}+S_{\mathrm{CS}}$ によって3次元ゲージ場の位相的特徴を記述することはなされていましたが，新たにWittenが提案したのは運動項を落としてチャーン・サイモンズ項のみを考えれば位相的場の量子論が定義できるということでした．この提案とともに，彼が明らかにした3次元チャーン・サイモンズ理論と結び目の量子不変量の関係[2)]は，位相的場の量子論の研究における最初の目覚ましい成果でした．結び目の不変量に関する最近の大きな話題はホモロジー的量子不変量ですが，[3)] この分野は可積分系や位相的弦理論の研究も巻き込んで活発な研究が進んでいます．

4. 状態の数え上げ v.s. 径路積分

位相的不変量には，しばしば数え上げを用いた定義と積分の計算を用いた定義の2つがあり，それらが一致するという事実は数学における深い結果となっています．典型的な例は（2次元）曲面 Σ のオイラー標数 $\chi(\Sigma)$ です．数え上げによるオイラー標数の計算では Σ の多面体分割を用いて

$$\chi(\Sigma)=V-E+F \tag{2}$$

と定義されます．ここで V, E, F は多面体分割における頂点，辺，面の数です．一方，Σ の計量 $g_{\mu\nu}$ から定まるスカラー曲率 R を積分して

$$\chi(\Sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{d}^2x\sqrt{g(x)}R(x) \tag{3}$$

からオイラー標数を求めることもできます．

量子論の重要な特徴は状態の重ね合わせ，すなわち量子

状態全体のなすベクトル空間を考えることにあり，状態の数え上げ（ベクトル空間の次元）は量子論と深く結びついています．位相的場の量子論の分配関数の計算を位相的相にある状態の（重み付き）数え上げとみなせば式(2)に対応する位相不変量を与えます．これがハミルトニアン的視点による計算です．一方，位相的理論のもつ対称性は非常に大きな対称性であるため，径路積分の計算が有限次元積分に還元される場合があります．このとき残された積分は式(3)に対応する位相不変量となっています．これはラグランジアン的視点からの計算です．場の量子論ではハミルトニアン的計算とラグランジアン的計算は一致すると考えられていますが，位相的場の量子論において，この事実が式(2)と式(3)が一致するという数学的に深い結果と対応していることは興味深いことです．

5. 分配関数の効用（ソリトンと双対性）

モノポールやインスタントンといったゲージ理論のソリトン的配位は，拡大された超対称をもつゲージ理論においてBPS状態と呼ばれる超対称性を部分的に保つ状態として現れます．超弦理論におけるD-ブレインも，これに相当するソリトン的配位です．専門的になるので詳細は省略しますが，拡大された超対称性をもつ理論にツイストと呼ばれる操作を行うことにより，位相的理論が構成できる場合があります．[1] この操作の重要な点は位相的相にある状態，すなわち$\langle \mathrm{phys}|T_{\mu\nu}|\mathrm{phys}'\rangle=0$が成り立つ状態が元の超対称理論でBPS状態に対応することです．位相的相にある状態はハミルトニアンのゼロ固有値状態であることに注意すれば，分配関数は超対称指数$\mathrm{Tr}\,(-1)^F \mathrm{e}^{-\beta H}=\dim \mathcal{H}_B-\dim \mathcal{H}_F$となり，超対称理論のソリトン的配位を含む真空構造に関する情報を与えます．ここで$\mathcal{H}_{B,F}$は位相的相にあるボゾン的あるいはフェルミオン的な状態全体のなすベクトル空間です．さらに理論に位相的相にあるBPS状態が保つ超対称性荷電を含む互いに可換な保存量の組$\{J_i\}$があると精密化された分配関数として重み付き数え上げ

$$Z(q_i)=\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H-\sum_i \mu_i J_i}=\sum_{\{n_i\}}\dim \mathcal{H}_{\{n_i\}}\prod_i q_i^{n_i} \qquad (4)$$

を考えることができます．ここで$q_i:=\mathrm{e}^{-\mu_i}$でありn_iは保存量J_iに対する量子数です．また$\dim \mathcal{H}_{\{n_i\}}$は与えられた量子数$\{n_i\}$をもつ位相的状態の数を表します．最近，よい性質をもつ多様体上の超対称ゲージ理論について局所化の方法による超対称指数の計算が大きく進展しましたが，[4] その多くはここで説明した分配関数(4)と深く関係しています．

一般に場の量子論の分配関数は相関関数の母関数となっていますが，位相的理論の分配関数は式(4)のように変数q_iの形式的べき級数として位相不変量の母関数となります．これに着目すると，不変量を個別に考えるのではなく位相的場の量子論の立場から，それらを母関数としてまとめて見たときの性質を研究するという方向が生まれます．2次元量子重力理論（リーマン面のモジュライ空間の幾何）とKdV階層（ビラソロ拘束条件）の関係[5] の発見に始まり，位相的場の量子論の多くで，このような見方により背後にある隠れた数理構造（ビラソロ代数やアフィンリー代数などの無限次元対称性や非摂動的な双対性）が見えてきます．例えば4次元非可換ゲージ理論の電磁双対性には極大超対称性が必要となると予想されています．電磁双対性においてソリトン的配位が重要な役割を果たすため，これは本質的に非摂動的性質ですが，ツイストの操作により極大超対称ゲージ理論から得られる位相的理論の分配関数は，インスタントン数kでラベルされるモジュライ空間のオイラー標数χ_kを不変量とする母関数$Z(q)=\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k q^k$となります．ここで（量子異常を考慮に入れると）電磁双対性は$Z(q)$がもつ保形性と呼ばれる数学的性質として理解できます．[6]

6. おわりに

位相的場の量子論が提唱されてから，すでに4半世紀以上が経過しました．拡大された超対称性ゲージ理論から得られる位相的ゲージ理論の最近の研究は，超対称ゲージ理論のインスタントン効果や双対性が共形場理論や可積分系の理論における量子群対称性のq-変形や楕円型拡張の問題と深く結びつくことを明らかにしつつあります．[7] また位相的弦理論も量子重力理論のトイモデルとして示唆的な成果をあげており[8] 位相的場の量子論の研究は当初の予想以上の大きな拡がりを見せています．

参考文献

1) E. Witten: Comm. Math. Phys. **117** (1988) 353.
2) E. Witten: Comm. Math. Phys. **121** (1989) 351.
3) 藤　博之：日本物理学会誌 **68** (2013) 801.
4) PTEP Special Section: Prog. Theor. Exp. Phys. **11B** (2015) 101.
5) E. Witten: Nucl. Phys. B **340** (1990) 281; M. Kontsevich: Comm. Math. Phys. **147** (1992) 1.
6) C. Vafa and E. Witten: Nucl. Phys. B **431** (1994) 3.
7) J. Teschner: arXiv: 1412.7145.
8) 大栗博司：日本物理学会誌 **60** (2005) 850.

菅野浩明〈名古屋大学大学院多元数理科学研究科
kanno@math.nagoya-u.ac.jp〉

（2015年11月24日原稿受付）