オストログラドスキーの定理：整合的な修正重力理論への道のり

Keyword: オストログラドスキーの定理

1. 要旨

現代宇宙論における最大の謎の一つは宇宙の加速膨張を引き起こすダークエネルギーの正体であり，これを説明するために一般相対論に変更を加える修正重力理論の研究が近年注目されている．[1)]一般相対論は太陽系スケールで精密に検証されており，今後はブラックホールや中性子星の連星合体時の重力波波形などからも検証が可能となる．そのような制限を満たしつつ，加速膨張を実現するために定性的に重力理論を変更する代表的な試みの一つが，一般相対論にスカラー場を一つ加えたスカラー・テンソル理論である．スカラー場をどのような形でラグランジアンに導入するべきかは自明ではなく，理論的整合性のもとでどの程度一般相対論から拡張することができるかということが近年盛んに研究されている．理論的整合性の一つとして，「ハミルトニアンが下に有界であること」が要請される．ハミルトニアンは系のエネルギーを与えるため，もしこれが下に有界でない場合，エネルギーの最小状態が存在しないことになる．そのような系は通常の系との相互作用を考えた場合に不安定になるため，整合的な理論とはみなせない．有界でないハミルトニアンを引き起こす自由度をゴーストと呼ぶ．その中でも特に高階微分を含む理論で生じるものはオストログラドスキー・ゴーストまたは線形不安定性[*1]と呼ばれる．ゴーストの存在の有無を判定するための最も基本的な定理がオストログラドスキーの定理である．[2, 3)] この定理自体は，一般相対論の知識を用いず拘束系の解析力学の手法[4)]により理解できるため，本稿では定理の面白さと，最近の研究における応用を紹介したい．

2. オストログラドスキーの定理

まず簡単な例としてラグランジアン

$$L=\frac{1}{2}\ddot{x}^2 \tag{1}$$

を考えよう．これは自由粒子のラグランジアン $L=\dot{x}^2/2$ と似ているが，2階微分である点が異なる．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddddot{x}=0 \tag{2}$$

と4階微分方程式になり，系の時間発展を指定するために4本の初期条件を必要とする．通常の2階微分運動方程式では1自由度につき2本の初期条件が必要となるため，この数え方に焼き直せば，2つの自由度が存在することになる．この余分な1自由度がゴーストである．

これを明確に見るために，補助変数を導入した形

$$L=\ddot{x}y-\frac{1}{2}y^2 \tag{3}$$

を考えよう．両者が等価であることは，y に関する運動方程式 $y=\ddot{x}$ を式(3)に代入すれば元のラグランジアンに帰着することから分かる．第一項を部分積分を用いて $-\dot{x}\dot{y}$ に書き換え，変数の再定義 $z=(x+y)/\sqrt{2}$，$w=(x-y)/\sqrt{2}$ により運動項を対角化すると，

$$L=-\frac{1}{2}\dot{z}^2+\frac{1}{2}\dot{w}^2-\frac{1}{4}(z-w)^2 \tag{4}$$

となる．これより，2階微分運動方程式に従う2つの自由度があり，そのうち1つは負の運動エネルギーを持つことが分かる．ハミルトニアンは，

$$H=-\frac{1}{2}p_z^2+\frac{1}{2}p_w^2+\frac{1}{4}(z-w)^2 \tag{5}$$

となり，正と負の運動エネルギーの項が同時に存在するため上下に非有界になっていることが見て取れる．この z の自由度がゴーストであり，特に今回のように高階微分に起因するものはオストログラドスキー・ゴーストと呼ばれる．このゴーストは，以下で見るように一般にハミルトニアンに運動量の線形項として現れることから，線形不安定性とも呼ばれる．

このように高階微分を含むラグランジアンは一般にゴーストを持つが，常に持つわけではない．より一般のラグランジアンに対してゴーストの有無の判定条件を与える定理がオストログラドスキーの定理である．オストログラドスキーの原論文[2)]は150年以上前に書かれたものだが，近年ウッダードの講義録[3)]で定理が紹介されてから広く認識されるようになった．この原論文はフランス語で書かれた130ページを超える大著であり，インターネット上では入手できないが，関西学院大学に蔵書が存在する．

では定理の中身を見てみよう．一般のラグランジアン $L(\ddot{q},\dot{q},q)$ に対して，オストログラドスキーの定理の主張は「$\partial^2L/\partial\ddot{q}^2\neq0$ を満たす（ラグランジアンが非縮退であるという）とき，ハミルトニアンが上下ともに非有界となる」である．オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial^2L}{\partial\ddot{q}^2}\ddddot{q}=(3\text{階微分以下}) \tag{6}$$

なので，ラグランジアンが非縮退であれば式(6)は4階微分方程式となり，系の時間発展を記述するために4本の初

期条件が必要である．したがって先ほどと同様に，系は2自由度を持つことになる．

実際にハミルトニアンに運動量の線形項が現れて上下ともに非有界となることを確かめる．ラグランジュ未定乗数λと補助変数Qを導入した

$$L(\dot{Q},Q,q)+\lambda(Q-\dot{q}), \tag{7}$$

という等価な形を考えよう．この時点ではラグランジュ未定乗数も含めて3個の力学変数があり，仮に拘束条件がなければ6本の初期条件が必要である．Q, q, λの正準運動量はそれぞれ，

$$P=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}, \quad p=-\lambda, \quad \pi=0, \tag{8}$$

と与えられる．一般に正準運動量の式が速度について解けない場合は，位相空間の自由度を減らす拘束条件として機能する．上のp, πの式には$\dot{Q}$, $\dot{q}$, $\dot{\lambda}$が現れていないため，それらについて解くことができず，まず$p+\lambda=0$, $\pi=0$という2本の拘束条件があることが分かる．もしPの式が速度について解けなければ，拘束条件が1本増え，合計3本の第1種拘束条件があることになる．しかし，ラグランジアンが非縮退すなわち$\partial P/\partial\dot{Q}\neq 0$である場合，陰関数定理により，少なくとも局所的に$\dot{Q}=\dot{Q}(P,Q,q)$と解けることが保証される．したがって拘束条件の数が2本に留まるため，余分なゴーストの自由度が生じてしまうのである．最終的に拘束面上で評価したハミルトニアンは

$$H=pQ+P\dot{Q}(P,Q,q)-L(\dot{Q}(P,Q,q),Q,q) \tag{9}$$

であり，運動量pが第1項の線形項のみに現れるため上下ともに非有界である．

オストログラドスキーの定理を回避するには，非縮退の仮定を破ればよい．ラグランジアン$L(\ddot{q},\dot{q},q)$の場合，縮退条件$\partial^2 L/\partial\ddot{q}^2=0$を課せば，式(6)の4階微分項の係数が消え，同時に3階微分項の係数も消える．したがって運動方程式は2階微分方程式になっており，実際にハミルトニアンも有界で1自由度しかないことが分かる．このように縮退条件を満たすラグランジアンに制限することで，ゴーストを持たない整合的な理論を考えることができる．

3. スカラー・テンソル理論

初期宇宙のインフレーションや現在の加速膨張宇宙を説明する方法の一つが，一般相対論にスカラー場を加えたスカラー・テンソル理論である．整合的な理論を作るためには，オストログラドスキー・ゴーストを持たないようにラグランジアン中の微分相互作用項をデザインする必要がある．前節の議論は一変数ラグランジアンに対するものだが，より一般の多変数ラグランジアンに対して縮退条件を拡張し，それを場の理論に応用すれば，ゴースト自由度を持たない整合的なスカラー・テンソル理論を構築するための道標として利用できる．

オストログラドスキー・ゴーストを自明に回避するスカラー・テンソル理論として，近年ホルンデスキー理論[5)]が注目を集めている．この理論は，ラグランジアン自体はスカラー場と重力場の高階微分を含むにもかかわらず，オイラー・ラグランジュ方程式が2階微分方程式となるように構築されたものである．非常に広いクラスの理論を包含しており，スカラー・テンソル理論による宇宙の記述を考えるうえで，整合的な理論の枠組みとして機能している．

最近の研究では，このホルンデスキー理論をさらに拡張した，“beyond Horndeski”と呼ばれるクラスの可能性も活発に議論されている．このクラスの特徴は，オイラー・ラグランジュ方程式が高階微分方程式であることを許しつつゴースト自由度を含まないようにラグランジアンを構築するという点である．そのために，どのようなラグランジアンに対してゴーストが現れるのか，その性質の理解がますます重要になっている．

オストログラドスキーの定理に代表されるゴースト判定条件を修正重力理論に適用し，ゴーストを持たない一般的なラグランジアンの形は何か，そのような理論を用いてインフレーション，ダークエネルギー，ブラックホールなどを記述するときどのような帰結が起こり得るのか，そしてそれをいかにして観測的に検証するか，これらを調べることが現代宇宙論における大きな流れの一つになっている．

参考文献

1) 小林　努：日本物理学会誌 **65** (2010) 621；須藤　靖：日本物理学会誌 **69** (2014) 442；辻川信二：日本物理学会誌 **69** (2014) 444；日本物理学会誌 **70** (2) (2015)—特集「発展し続ける一般相対論」.
2) M. V. Ostrogradsky: Mem. Acad. St. Petersbourg **VI 4** (1850) 385.
3) R. P. Woodard: Lect. Notes Phys. **720** (2007) 403 [arXiv: astro-ph/0601672]; Scholarpedia **10** (2015) 32243 [arXiv: 1506.02210].
4) P. A. M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, New York, 1964).
5) G. W. Horndeski: Int. J. Theor. Phys. **10** (1974) 363.

本橋隼人〈シカゴ大学カブリ宇宙物理研究所
motohashi@kicp.uchicago.edu〉

(2016年4月1日原稿受付)

*1 線形不安定性は様々な文脈で用いられる用語だが，本稿ではハミルトニアン中の正準運動量の線形項に由来する不安定性という意味で用いる．