コスタリッツ–サウレス転移

Keyword: コスタリッツ–サウレス転移

離散的な自由度をもつIsing模型は2次元で有限温度において相転移を示すのに対し，秩序変数が連続的な対称性をもつ場合には，低温でも長距離秩序が存在しないことが厳密に知られている.[1] しかし，XY模型のように低温でのゆらぎが一つの調和モードで表される場合には，長距離秩序を伴わない相転移が存在する．Kosterlitz-Thoulessは渦励起に関した議論によってその機構を明らかにした．そのためこの相転移はKosterlitz-Thouless（KT）転移[2]とよばれる．あるいはその先行研究を行ったBerzinskii[3]を加えてBKT理論とよばれることもある．

その機構を2次元XY模型

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j) - H\sum_{i=1}^{N}\cos(\theta_i) \tag{1}$$

において紹介する（$H=0$の場合）．相転移の特徴を明らかにするため低温でのスピン相関を調べておこう．低温では角度が少しずつ変わるので，隣同士の角度の差が小さいとして，$(\theta_i-\theta_j)$に関する調和近似

$$\mathcal{H}_{HM} \simeq \frac{J}{2}\sum_{\langle ij\rangle}(\theta_i-\theta_j)^2 + \mathrm{const.} \tag{2}$$

が有効になる．このとき，ゆらぎの波数$\boldsymbol{k}$成分は$\langle\theta_k\theta_{-k}\rangle \simeq (2k_BT/J)k^{-2}$で与えられる．波数$k$が小さい長波長のゆらぎのエネルギーが小さいため，1，2次元では角度のゆらぎが発散する．このタイプのゆらぎは赤外発散とよばれる．このゆらぎを反映して，2次元においては距離r離れたスピン相関関数は

$$\langle\cos(\theta(\boldsymbol{r})-\theta(0))\rangle = \mathrm{e}^{-1/2\langle(\theta(\boldsymbol{r})-\theta_0)^2\rangle} \propto r^{-k_BT/2\pi J} \tag{3}$$

で与えられる．ここで注目すべき点は，相関関数が，指数的緩和ではなく，冪的に減衰していることである．つまり，相関長が無限大になっている．このことから調和近似が成立する状況では，ゆらぎが指数的緩和から冪的緩和に変わることがわかる．この変化がKT転移の本質である．式(1)と式(2)を比べると，この違いは角度に関する周期性，つまり，角度が2π変わったときスピンの向きがもとに戻るということが有意であるかどうかの違いとみることができる．

この調和近似の破れを象徴するものが渦欠陥である．図1に典型的な渦を示す．場所$\boldsymbol{r}$での渦度$n(\boldsymbol{r})$はその点の周りの閉曲線に沿っての角度変化の積分

$$n(\boldsymbol{r}) = \oint_0 \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\theta(\boldsymbol{r}) = 2\pi m, \quad m: \text{整数} \tag{4}$$

で表される．図1で白丸が$n=+1$，黒丸が$n=-1$の渦欠陥を表している．

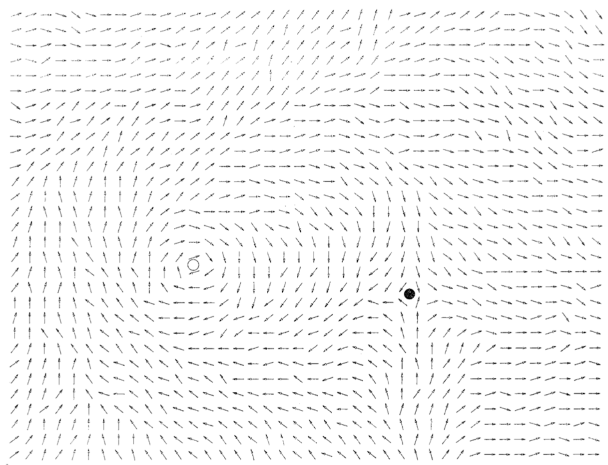

図1　渦：白丸が渦度が$+1$，黒丸が渦度が-1の渦欠陥.（文献4より加筆転載）

渦はXY模型の秩序変数が作る空間（円周）におけるトポロジカルな欠陥である．この観点から，KT転移はトポロジカルな自由度によって引き起こされる相転移ということができ，相転移の研究に新しい概念を導入した重要なブレークスルーとして注目され，昨年のノーベル賞受賞となった．

渦があることによるスピンの構造はちょうど点電荷があるときの電気力線で表されるように見える．そこで式(4)においてベクトル解析のストークスの定理を用いると渦の中心$\boldsymbol{r}_i$に電荷$n(\boldsymbol{r}_i)$があると見なせる．渦の自由度からのハミルトニアンへの寄与は，この電荷を用いると，$K=\beta J$として2次元Coulombガス模型

$$\beta\mathcal{H}_v = -\pi K\sum_{i\neq j} n_i n_j \ln\frac{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}{a} + \pi K\tilde{C}\sum_i n_i^2 \tag{5}$$

で与えられる.[2] ここで，第1項は渦同士が対数的な相互作用，すなわち2次元Coulomb型の相互作用をしていること，第2項は渦があることで増加するエネルギー（$\mu=\pi K\tilde{C}$とする）を表している．ただし単独の渦からのエネルギーは系の大きさとともに発散するため，ここでは，正負の渦の数が等しい中性条件を課している．

Kosterlitzはこの2次元Coulombガスのハミルトニアンに対して，巧妙な実空間繰り込み群の方法を用いることで，渦間の相互作用の強さを表す$\beta\pi J$と，渦の出現のしやすさを表す$\mathrm{e}^{-\beta\mu}$の長さのスケールに関する変換を求め，この系が示す特異な相転移，Kosterlitz-Thouless転移の特徴を明らかにした.[2] そこでは，渦の相互作用の強さJとμの変

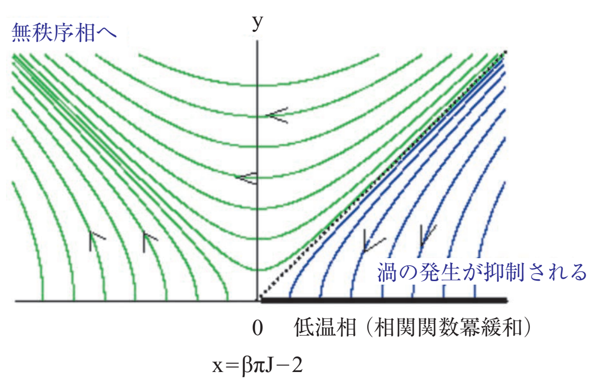

図2　Kosterlitz-Thouless 転移の繰り込み流れ図.

化を表す量として

$$x=\beta\pi J-2\,,\quad y=4\pi \mathrm{e}^{-\beta\mu}\tau^2 \tag{6}$$

が導入された．ここでτは渦のコアの半径である．長さのスケールの変換，つまりτの変化によってx, yがどのように変化するかを調べることで，繰り込み変換の関係

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ln\tau}=-y^2 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\ln\tau}=-xy \tag{7}$$

が得られた．この繰り込み群の流れは図2のようになる．図の右側の青で示した流れは，低温では距離のスケールが大きくなると，渦の出やすさを表すyが小さくなり渦が出にくくなることを表している．繰り込まれた先はx軸上の太い実線で示した領域であり，そこでは$y=0$のため渦がない．この領域は調和近似が成立する低温相を表している．それに対し，高温領域（$x<0$）ではスケールを大きくすると渦が出やすくなり，高温の無秩序相に移行する．その流れの境目（$x=y$を表す破線）が相境界を表している．境界線少し上では，距離のスケールを大きくすると最初はyが小さくなる，つまり渦が出にくくなるように見えるが，最終的には高温相に向かう．[*1]　この流れ（7）を解析すると，相関長は臨界点からの温度のずれをtとして

$$\xi\sim \mathrm{e}^{\pi/\sqrt{Ct}}\,,\quad C>0 \tag{8}$$

であることが示される．つまりこの系の相関長は通常の冪的発散（$t^{-\nu}$）ではなく特異な指数的発散を示す．これは通常の臨界指数が$\nu=\infty$であることに相当する．臨界点は$x=0$から$K_{\mathrm{C}}=2/\pi$で与えられるので，臨界点でのスピン相関関数の冪ηの緩和は$\eta=1/2\pi K_{\mathrm{C}}=1/2\pi(2/\pi)=1/4$であり，臨界点では$\eta=1/4$であることを示している．KT転移ではゆらぎが大きいため，数値計算において転移点を決めるのが難しい．そこで相関関数の冪を温度の関数として求め，$\eta=1/4$を臨界点のクライテリオンとして臨界点が決められることがある．また，KT転移における相転移点の決め方として，KT点で特別な対称性が表れることを利用したレベルスペクトロスコピーとよばれる方法も考案されている．[5)]

KT転移はXY模型だけでなく，秩序変数が同じ対称性（U(1)）を持つ2次元の融解問題，超伝導，超流動や，相互作用が式(5)で与えられる2次元電子ガスなど多くのシステムで起こる．またモデル（5）は変数が整数の離散ガウス模型と双対関係にあり，離散ガウス模型でモデル化される結晶成長での界面成長の模型でもKT転移が現れる．[6)] この模型は低温でサインゴルドン模型となり，場の理論観点からも研究が進められている．さらに離散的なXY模型であるq状態クロック模型では，$q\geq 5$で互いに双対な2つにKT転移が現れることも知られている．[7)]　また，一般に2次元の古典系の相転移は，1次元量子系の量子相転移と見なすことができる．最近盛んに研究が進められている1次元の量子スピン系においてもKT転移に相当する転移がしばしば現れる．このように，図2はこれら多くの系で起こる相転移の普遍的機構を与える重要なものとなっている．

参考文献

1）N. D. Mermin and H. Wagner: Phys. Rev. Lett. **17**（1966）1133; P. C. Hohenberg: Phys. Rev. **158**（1967）383.
2）J. M. Kosterlitz: J. Phys. C **7**（1974）1046; J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless: J. Phys. C **6**（1973）1181.
3）Z. L. Berezinskii: Zh. Eksp. Theor. Fiz. **59**（1971）1144; Sov. Phys. JETP **34**（1972）610.
4）S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **60**（1978）1669.
5）野村清英，岡本清美：日本物理学会誌 **56**（2001）836—BKT転移とレベルスペクトロスコピー．
6）S. T. Chui and J. D. Week: Phys. Rev. B **14**（1976）4978; R. H. Swendsen: *ibid.* B **18**（1978）492.
7）J. V. Jose, L. P. Kadanoff, S. Kirkpatrick and D. Nelson: Phys. Rev. B **16**（1977）1217; S. Elitzur, R. B. Pearson and J. Shigemitsu: Phys. Rev. D **19**（1979）3698; J. L. Cardy: J. Phys. A **13**（1980）1507.

宮下精二〈東京大学大学院理学系研究科　miyashitai@phys.s.u-tokyo.ac.jp〉

（2016年12月21日原稿受付）

[*1]　この相図は渦の密度が希薄な場合を考え，yが小さいと仮定した時のものである．μが小さく，渦が発生しやすい系では，KT転移ではなく一次相転移が起きる．