非平衡系における普遍性と数理——KPZ方程式を例として

笹本智弘 〈東京工業大学理学院　sasamoto@phys.titech.ac.jp〉

はじめに

Boltzmannがエントロピーのミクロな表式を与え，平衡統計力学の基礎を確立したその時から，非平衡系に対する統計力学は次なるフロンティアとして関心を持たれ続けてきたが，そこには多くの困難が待ち受けていた．平衡系の統計力学においては，アンサンブルを仮定することでダイナミクスの問題を不問に付したまま系の性質を議論できるが，非平衡系に対しては，定常状態におけるアンサンブルをどのように設定すればよいかわからないし，長時間の時間発展を追いかけようとするとカオスのような根本的な問題が現れてくるからである．

一方で平衡から遠く離れた非平衡系は，散逸構造のような平衡系には見られない特異な相転移現象を示したり，フーリエ則のような現象論では説明できない異常な輸送現象や揺らぎを示すなど，物理として興味深い対象であることは間違いない．そのような中で，1970年代から非平衡現象を確率過程を用いてモデル化し，その性質を調べることで理解を深めようという研究が沸き起こってきた．

当初は問題の定式化や基本的な性質の確認といった基礎的な研究が主であったが，1980年代に入ってコンピュータが日常的に使えるようになり，より具体的な問題が研究の対象となってきた．特に非常に簡単なルールから極めて複雑なパターンが現れ得ることが認識され，多くの興味が持たれるようになった．本特集のテーマの1つである複雑系の研究である．例えば，自然界に見られる樹状成長パターンが，正方格子上の領域がランダムウォーク粒子の到達した点でのみ成長する，というような簡単なルールからも再現できることなどがわかり大きな関心を集めた（Diffusion Limited Aggregation, DLA）．

KPZ方程式と普遍クラス

別の成長現象としてバクテリアコロニーの成長を調べると，外部パラメータの値を変えることで成長パターンが変わるという一種の相転移現象が見られる．その中で，マクロには単純な円形領域の成長となるような，比較的地味な場合があるが，この場合興味深いのは，界面高さの揺らぎの大きさが時間とともに増大し（動的ラフニングと呼ばれる），かつその揺らぎがガウス的ではないということがある．80年代に種々の界面成長モデルが提案されていたが，多くのコンピュータシミュレーションにおいて，揺らぎの大きさが$t^{1/3}$のスケールであるという普遍性が見出された．この時期，平衡系の相転移点における普遍性はくりこみ群の理論によりほぼ確立されていたが，非平衡系における普遍クラスの候補として関心を持たれた．

このような状況において，1986年，Kardar, Parisi, Zhangの3人は，このような界面の成長を記述する簡単なモデル方程式を提案した：

$$\frac{\partial}{\partial t}h=\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)^2+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}h+\sqrt{D}\eta. \tag{1}$$

ただしここで$h=h(x,t)$は位置x，時刻tにおける界面の高さ，$\eta=\eta(x,t)$は平均0，共分散$\langle\eta(x,t)\eta(x',t')\rangle=\delta(x-x')\delta(t-t')$のガウス白色ノイズであり，$\lambda$, ν, Dは右辺各項の強さを表すパラメータである．これがKPZ方程式であり，最初の論文では動的くりこみ群を用いて指数1/3が得られることなどが議論された．

1次元における輸送を記述するよく知られた非線形偏微分方程式としてBurgurs方程式があるが，KPZ方程式はBurgers方程式にノイズ項を加えて揺らぎの効果を取り入れたものと同等である．さらに空間を離散化すると，多数の粒子が1次元格子上を体積排除効果の下で非対称なランダムウォークを行うモデルとなるが，これは良く知られた非対称単純排他過程（Asymmetric Simple Exclusion Process, 以下ASEP）に他ならない．このように界面成長の問題と1次元輸送の問題の等価性が認識されるようになった．

なおKPZの原論文では2次元以上の場合についても議論が行われているが，その振る舞いに関しては未だにわからないことが多い．

1次元KPZ系研究の発展

KPZ方程式の導入は昭和61年，平成となる3年程前の出来事である．KPZ方程式は導入された直後から関心を持たれ，様々な観点から研究が行われたが，導入後数年経ち平成に入ってから，特に1次元系の研究が進むことになった．まず1次元系におけるいくつかのモデルは，可解性を持つことが認識されるようになってきた．特にASEPの確率的時間発展を記述するマスター方程式の遷移率行列が，XXZ量子スピン鎖のハミルトニアンと等価であることがわかった．この事実を用いて揺らぎの指数1/3が厳密に導出された．

導入から約10年経った1995年にはBarabasi-Stanleyの本が出版された．[1] これは界面成長に関するそれまでの研究を比較的平易な言葉でまとめた本であり，現在においてもこの分野の基本的な参考書である．KPZ普遍クラスに関しても比較的詳しく書かれているが，方程式そのものに関

しては“the KPZ equation cannot be solved in closed form due to its nonlinear character”と言及されている．

量子スピン系との基本的な関係が理解されたとはいえ，その事実を本格的に有効に用いた研究はその後しばらく現れず，次の大きな進展は全く別の所からもたらされた．1999年，ある離散界面成長模型の高さ分布が，長時間極限ではランダム行列理論で知られていたGUE Tracy-Widom（TW）分布関数となることが，Johanssonによって示されたのである．これは非平衡系に対するKPZ普遍クラスにおけるスケーリング関数が1つ決定されるという画期的な結果であったが，前年のBaik，Deift，Johanssonによるランダム置換に現れる最長増加部分列の長さの分布を決定する研究の応用といえるものであった．後者は物理と直接関係はなくむしろ数学における表現論と確率論の境界領域における成果であり，関連テーマはOkounkov（2006年フィールズ賞受賞）なども貢献をしてその後数年間大きな発展を見ることになるが，そのような異分野における重大な発展が，まさにKPZ系の理解の進展をもたらしたのである．

このような経緯や，TW分布関数がPainlevé方程式の解を用いて表示されるという数理性の高さもあってか，しばらくはJohanssonの結果は実際の物理に意味があるのかどうかは不明であるというような意見も聞かれ，2000年代後半は重要性を認識したいくつかのグループにおける研究が少しづつ進展する時期であった．しかし2010年にまた大きな進展があった．まずKPZ方程式そのものに対して，界面の高さ分布に関する厳密解が得られた．[2] 導入からほぼ四半世紀を経て，分野で標準的な文献でcannot be solvedと書かれた方程式が厳密に扱えるようになったのである．さらに同じ年に，竹内・佐野は液晶乱流を用いた界面成長実験において，TW分布を明確に見出した．標語的に言えば，Painlevé方程式で記述される一見複雑な分布関数が現実の界面成長の物理を記述していることが実験室で見いだされたのである！

これらの研究成果はその後の様々な発展を促した．当初の厳密解はそれまでの研究の蓄積を組み合わせて長い計算の後に最終結果に辿り着くという形で得られたが，現在では手法もかなり整備・一般化され，多くのモデル系の解析に用いられるようになっている．またKPZ方程式に対する厳密解は，非線形確率偏微分方程式の数学的定式化を大きく進展させる契機となり，特にM. Hairerは正則構造理論を構築してフィールズ賞を受賞した．さらに実験においてもより多くの系でKPZ普遍性の確認が行われるようになり，また分布の初期条件依存性，多時刻相関といった詳細な情報が得られ，理論の進展を促すようになっている．

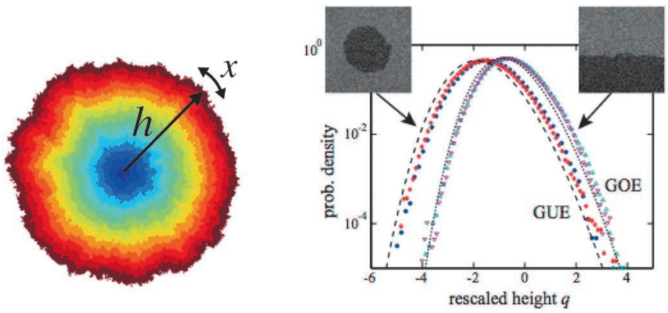

図1　（左）液晶乱流における界面成長．（右）TW分布との比較．[3]

令和の時代へ

ここまでKPZ系，特にその1次元系に関する理解が，平成の30年を通して当初全く予期されていなかったであろう方面からの進展も取り込んで深化・発展してきた歴史の概略を述べてきた．KPZ系に対する厳密解が得られたと言っても，現在実際に計算できるのは系のごく一部の性質に過ぎないし，またその可解性に関する完全な理解が得られた訳でもない．例えば2次元Isingモデルと比較すると，まだまだ未解明の点が多く，今後もさらなる理解の深化が望まれる．一方で今後は，KPZ系そのものの研究だけではなく，これまでに培われた概念・手法を他の非平衡系の理解の進展に役立てていく研究が重要となってくるであろう．実際既に1次元の非調和鎖が示す異常輸送現象の理解に有用であることが見出され，そのような研究が進展しつつある状況である．今後はさらに高次元系や量子系における非平衡現象の理解の深化に，役立っていくものと期待される．より具体的な方向性は予測不可能な面も大きいが，KPZ方程式は非線形性・無限自由度・ノイズ効果と3つ揃った非平衡統計力学モデルの中では一番簡単なものであるため，今後も基本モデルとして重要な役割を果たし続けるに違いない．

前節で2人のフィールズ賞受賞者の名前が挙がったが，KPZ系に限らず，統計力学の数理的な分野は現代数学の最先端の研究と直接つながってきている．新しい時代には両者の交流からどのような新しい物理概念や数学的手法が生み出されてくるか，多いに楽しみである．

参考文献

1）A. Barabasi and H. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*（Cambridge, 1995）.
2）T. Sasamoto and H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **834**, 523（2010）.
3）K. Takeuchi et al., Sci. Rep. **34**, 1（2011）.

（2018年12月10日原稿受付）