

# Atiyah-Patodi-Singer の指数定理

## ——素粒子・物性・数学の交叉点

深谷 英 則 <大阪大学大学院理学研究科 hfukaya@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp>

大野木 哲 也 <大阪大学大学院理学研究科 onogi@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp>

山口 哲 <大阪大学物理研究所 yamaguch@het.phys.sci.osaka-u.phys.ac.jp>

Atiyah-Patodi-Singer (APS) の指数定理は、境界のある多様体上の数学の定理である。こう書くと難しそうで拒否反応を示す読者もいるかもしれないが、もともと指数定理は物理学を起源としていて、実際、電子と電磁場の性質を関係づけるものである。4次元で平坦な時空を考え、電場  $\mathbf{E}$ 、磁場  $\mathbf{B}$  として APS 指数定理を書き下すと、

$$n_+ - n_- = c \int_X d^4x \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2} \eta(Y)$$

となる。ここで、左辺の  $n_{\pm}$  は電子の満たす Dirac 方程式でカイラリティ（運動方向に対するスピン演算子）という性質が  $\pm 1$  の解の個数を表す。右辺の  $c$  は次元だけで決まる定数、第二項は  $\eta$  不変量とよばれ、境界面  $Y$  に伝導電子が現れたとき、その Dirac 演算子の正の固有値と負の固有値の差を表す量である。

したがって、APS 定理は電磁場の情報（を時空間で積分したもの）と、電子の全体の Dirac 方程式の解の個数、および境界上に現れる電子の情報の三つの物理量を結びつけるものである。さらに、この定理の右辺第一項は、絶縁体の内部（バルク）の重い電子の有効作用と考えられ、表面（エッジ）の伝導電子の時間反転対称性の量子異常の相殺を説明する。すなわち、APS 定理の第一項（バルク電子の寄与）がゼロでない場合、それに応じて必ず第二項の起源となる境界上の伝導電子（エッジ電子）が現れなければならない、合計が整数になるという性質が、系全体での時間反転対称性を保証する。この性質は、近年注目されているトポロジカル絶縁体の性質と一致する。トポロジカル絶縁体とは、内部で電子がギャップを持ち、絶縁体としてふるまうが、表面ではギャップが閉じてよい伝導

性を示す特殊な物質である。上記で示した APS 指数定理の性質は、量子異常の相殺を通じて、トポロジカル絶縁体のバルクエッジ対応を説明する、その数学的保証を与える。このことから、近年、素粒子論、物性理論の研究で注目されている。

しかし、APS 定理のオリジナル論文は難解で、しかも物理的に実現されるとは考えられない非局所的な境界条件をフェルミオン場に課すことで定理を導いている。

2017年、私たちは素粒子論でよく知られた手法を使って、APS 指数定理と同じ結果を与える新しい定式化を見出した。非局所的境界条件を必要とせず、ドメインウォールフェルミオンとよばれる、トポロジカル絶縁体のよい模型となる演算子を用い、APS と同じ結果を与える物理量を定式化した。この新しい定式化は計算もより簡単なので、「物理屋でもわかる APS 指数定理」として発表した。

この研究は数学者からも大きな反響を呼び、指数定理の専門家である古田幹雄氏、松尾信一郎氏、山下真由子氏が加わり、物理、数学の分野をまたがる共同研究へと発展した。その結果、「任意の APS 指数に対し、それと同じ結果を与えるドメインウォールフェルミオンの演算子が存在する」ことの数学的証明を与えることができた。

この証明ではさらに1次元高い時空の指数定理を異なる2つの方法で評価、それぞれがオリジナルの APS 指数および私たちの新しい定式化と一致することで示された。この結果は任意の偶数次元、任意のリーマン計量を持つ多様体上での APS 指数について成り立つものである。

### —Keywords—

#### 指数定理：

Dirac 方程式の解の個数で表される解析的な指数と、電磁場のようなゲージ場に関する幾何学的（位相的）な指数が等しいという定理。

#### バルク・エッジ対応：

トポロジカル絶縁体において、絶縁体内部（＝バルク）の性質と表面（＝エッジ）の伝導電子の性質の相互関係を指す。通常、それぞれの運動量空間における位相幾何学的（トポロジカル）な性質から記述されることが多いが、本稿の APS 定理は実空間における電磁場への応答の形で説明する。APS 定理は並進対称性を失った系や、相互作用系でも成り立つという利点がある。

#### ドメインウォールフェルミオン：

質量を持つ Dirac 方程式に従うフェルミオンで、その質量の符号が反転する領域（ドメインウォール）を持つ系をさす。ドメインウォール上のみに質量ゼロのモードが現れ、それ以外の領域では大きな質量を持つという、トポロジカル絶縁体のよい模型となっている。トポロジカル絶縁体は境界付きの多様体上で考えられることが多いが、私たちのアプローチは境界の外側も考えるセットアップを用いる（下図はそのイメージ）。

