

ゲージ理論を行列模型を用いて調べる —— ラージ N 極限への挑戦



大川 正典

広島大学大学院理学研究科
okawa@hiroshima-u.ac.jp

素粒子の標準モデルは、その基礎をゲージ理論においている。実際、電磁相互作用を媒介する光子は $U(1)$ ゲージ理論により記述されており、また強い相互作用を作り出すグルーオンは $SU(3)$ ゲージ理論に支配されている。光子は電荷を持たないので自己相互作用をしないが、グルーオンは自分自身で電荷（色電荷と呼ばれる）を持ち自己相互作用をし、その結果として強い力が作り出される。両者の違いは数学的には、 $U(1)$ 群が可換なのに対して、 $SU(3)$ 群が非可換であることからくる。一般に $SU(N)$ 非可換ゲージ理論は非常に複雑な構造を持っているが、1974年、't Hooft は $SU(N)$ 群の次元 N を大きくした時、摂動論の各次数でプラナーダイアグラムと呼ばれる特定のダイアグラムからの寄与しかなく、理論が簡単になることを発見した。ただし強い力が作り出されるのは非摂動論的效果であり、相互作用の大きさのべき展開で定義される摂動論では解析できない。

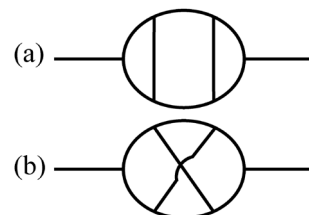
非摂動論的效果の研究をするには、時空を離散化し4次元格子に理論を定義し、自由度を有限にして数値シミュレーションを行うのが常套手段である。しかし N が大きいとき、 $SU(N)$ ゲージ理論を格子上で調べるのは現実的ではない。その理由は以下の通りである。一辺が L の4次元正方格子を考える。各格子点には4つの $SU(N)$ 行列を置くので、全体の自由度は $4(N^2 - 1)L^4$ となる。スーパーコンピュータで計算可能な自由度の数には限界があり、例えば $L=30$ とすると、 N が10を大きく超える計算はできない。

1982年江口と川合は、 N を無限にしたとき格子上で定義された $SU(N)$ ゲージ理論は、4つの $SU(N)$ 行列のみを持つ行列模型（江口・川合モデル、EKモデル）と等価である可能性を示した。以下で、 N を大きくとる極限をラージ N 極限と呼ぶ。EKモデルの自由度は $4(N^2 - 1)$ なので、数値シミュレーションで N は数千の値を持つことができ、実質的にラージ N 極限が取れてしまう。残念ながら、EKモデルは非摂動論的研究に重要な中間結合領域で破綻してしまう。この欠点を解決するために種々の改良が試みられ、2010年最終的に、González-Arroyo と筆者は、理論にある種のツイスト境界条件を課すことにより、中間結合領域でも有効な行列模型（TEKモデル）を構築した。現在ではTEKモデルを用いて、 $SU(N)$ ゲージ理論のラージ N 極限でのクォーク間ポテンシャルや中間子質量が非摂動論的に計算されている。

近年、アジョイント表現に属するスカラー場やフェルミオン場を伴った $SU(N)$ ゲージ理論が大きな関心を呼んでいる。その理由のひとつに、AdS/CFT 対応がある。これによると、Anti de Sitter 時空を背景に持つ超重力理論と、ラージ N 極限でのゲージ理論との間に対応がある。 $SU(N)$ 群のアジョイント表現にあるスカラー場やフェルミオン場のラージ N 理論も、行列模型を用いて調べることができる。行列模型による非摂動論的效果の研究は始まったばかりであり、今後の発展が強く望まれる分野である。

—Keywords—

摂動論とダイアグラム：
相互作用の大きさ λ が小さいとき、 λ のべき展開で理論を定義することを摂動論という。摂動論の各項はダイアグラムと呼ばれる図で表現できる。特に、2次元平面内に描けるダイアグラムはプラナーダイアグラムと呼ばれる。



(a) プラナーダイアグラムと
(b) 非プラナーダイアグラムの例

非摂動論的效果：
 $SU(N)$ ゲージ理論の物理量は、 λ に対して $e^{-c/\lambda}$ のような依存性を持つ (c は定数)。この項は λ のべき展開が不可能であり、摂動論では研究できない非摂動論的效果を表している。格子上の場の理論を用いた数値シミュレーションは、非摂動論的效果を研究する方法として確立している。

アジョイント表現：
 $SU(N)$ 群の元 G に対して、基本表現の場 Φ は、 $\Phi \rightarrow G\Phi$ のように変換される。これに対して、アジョイント(随伴)表現の場 A は、 $A \rightarrow GAG^T$ のように変換される。 $SU(N)$ 格子ゲージ理論では、クォークは基本表現、グルーオンはアジョイント表現に属している。AdS/CFT 対応に現れるゲージ理論のスカラー場やフェルミオン場も、アジョイント表現に属している。