多重SLE/GFF結合から動的ランダム行列理論へ

越田真史 〈中央大学理工学部 koshida@phys.chuo-u.ac.jp〉

L. Onsagerによる二次元イジング模型の厳密解の発見以来，臨界現象は統計物理学における中心的テーマの一つであり続けてきた．このような「古典的な」テーマに対する，数学的なアプローチは，最近20年余りの間に著しい発展を遂げた．その背景に，必要な確率論の道具立てが整備されてきたということが挙げられる．

確率論とは，事象（イベント）がランダムに発生するような世界を解析する数学の分野で，事象の集まりと，それぞれの事象の発生確率が与えられた設定を基本の枠組みとする．統計物理学も，実現可能なすべての状態（＝事象）に対して，その重み（＝発生確率）を与える，というものなので，自然に確率論の設定に落ち着くことになる．

臨界現象を研究するための，確率論の道具立てとして，シュラム・レヴナー発展（Schramm–Loewner Evolution, SLE）は，最も重要なものの一つである．これは，二次元臨界格子模型における，ドメイン壁の連続極限を記述することを目的に導入された，ランダム曲線である．ここにいう「ドメイン壁」とは，例えば，イジング模型の＋スピンと－スピンの境界線のことを指す．SLEにおいて画期的だったのは，二次元領域内のランダム曲線を境界（一次元）におけるランダムな点の運動，すなわち一次元確率過程で特徴づけるという点であった．しかも，ランダム曲線が臨界格子模型のドメイン壁を記述すると仮定すると，この一次元確率過程はブラウン運動に限られるのである．これにより，ランダム曲線の研究が，ブラウン運動という，よく知られた確率過程の研究に帰着したのである．

ところで，SLEは一本のランダム曲線を扱う．他方，格子模型に立ち返れば，複数のドメイン壁を同時に考える，というのは自然と思われる．こうした動機から，SLEを複数のランダム曲線を扱う場合へ一般化したものは，多重SLEとよばれる．

SLEにおいて，一本のランダム曲線が，境界上の確率過程に対応したことの類似として，多重SLEでは，多重曲線が，境界上の多粒子確率過程に対応する．しかし，SLEの場合よりも状況は複雑である．多重SLEに対しては，格子模型のドメイン壁を記述するという，物理的な仮定を課しても，境界上の確率過程に関する情報は何も得られないのである．では，多重SLEを考えるにあたって，境界上の確率過程は何であるべきだろうか．

我々が着目したのは，近年盛んに研究されている，SLEとガウス自由場（Gaussian Free Field, GFF）との結合である．

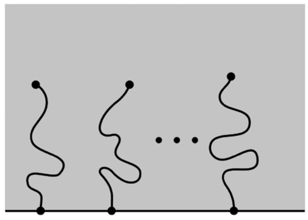
GFFとは，質量のない自由ボーズ場の，確率論における別名である．GFFが定義された領域に，SLEに沿って切り込みを入れる操作を時間発展と考えることで，GFFの時間発展系が得られる．SLE/GFF結合とは，このGFFの時間発展系がある種の定常性を示す現象のことを指す．これは，SLEが登場して以来，度々議論されてきた，「共形場理論との結合」の一例を与えている．

我々は，このSLE/GFF結合を多重SLEへ拡張しようと試みる中で，上記の問題への解答を得た．結論としては，多重SLEとGFFの結合が成立するための条件として，境界上の確率過程が，ダイソン模型でなくてはならないのである．

ダイソン模型は，元々ランダム行列の動的拡張として導入されたもので，長距離相互作用する多粒子系の確率過程としては最もよく研究されている例の一つである．我々の結果は，このような動的ランダム行列理論に対して，多重SLEとGFFの結合という新しい視点を提供しているものとも考えられる．

用語解説

シュラム・レヴナー発展（SLE）：
穴のない二次元領域の，境界の二点をつなぐランダム曲線．一次元の境界上の確率過程によって，二次元領域内のランダム曲線を特徴づける．複数の曲線を記述できるように拡張したものは，多重SLEとよばれる（下図）．



ガウス自由場（GFF）：
質量のない自由ボーズ場の作用汎関数は $S[\varphi]=\int(\nabla\varphi)^2$ で与えられる．GFFとは，この作用汎関数についての経路積分に，数学的な意味付けを与えたものである．

ダイソン模型：
対数ポテンシャルによる斥力相互作用をもつ，一次元多粒子確率過程である．ランダム行列の動的拡張を起源にもつ．