ODE/IM 対応
——常微分方程式と量子可積分模型の不思議な関係

伊 藤 克 司

東京工業大学理学院

ito@th.phys.titech.ac.jp

1998年ダラム大学のパトリック・ドレイとアムステルダム大学（現トリノ大学）のロベルト・タテオは，ある**量子可積分模型**の熱力学的ベーテ仮説（Thermodynamic Bethe Ansatz, **TBA**と略す）**方程式**の数値解から得られた結果と量子力学の2重井戸型ポテンシャルの束縛状態のエネルギーの結果を比較し，その間に奇妙な一致があることを見つけた．彼らは他のポテンシャルの場合も一致することを確認すると，この対応を“驚くべきつながり”と称し論文にまとめた．

彼らの動機となったのはパリ–サクレー大学のアンドレ・ボロスによる量子力学の**完全WKB解析**におけるスペクトル行列式のみたすある関数関係式であった．ドレイとタテオはこれが量子可積分模型における**Y-系**と呼ばれるものと一致することを看破したのであった．

一方でその関数関係式は1970年代に数学者の渋谷泰隆による常微分方程式のストークス現象の解析から得られたものとも一致しており，その記述を用いて対応が数学的に整備された．その後様々な常微分方程式の例で量子可積分模型との対応が確認され，2007年のドレイ–ダニング–タテオのレヴュー論文から“ODE/IM対応”という名称が一般的になった．ODEは常微分方程式，IMは可積分模型を表す．ODE/IM対応はこのように常微分方程式のスペクトル問題と量子可積分模型における関数関係式の問題の間の対応という形に定式化される．

ボロスが考えたシュレーディンガー方程式の解の$\hbar$補正を全て含む完全WKB解析において，波動関数のWKB展開は一般に漸近級数であり，収束半径ゼロの発散級数となる．彼は，リサージェンスと呼ばれる，漸近級数をボレル再総和法で扱い発散を処理する方法を用いて，スペクトルを非摂動効果まで含め厳密に計算する手法を与えた．この方法では漸近級数は別の複素平面における収束級数に変換され，その全平面に解析接続された関数をラプラス変換でもとに戻すことによりWKB周期を扱う．変換された関数のもつ特異点の情報はラプラス変換の積分路を定義する際の曖昧さを生じるが，一方で非摂動効果に関する有用な情報を与える．WKB周期の不連続性を具体的に与える公式はデラバエレ–ファムの公式として知られている．

一方で1994年サイバーグとウィッテンにより発見された$\mathcal{N}=2$超対称ゲージ理論の低エネルギー有効理論の厳密解の発見により，超対称ゲージ理論の強結合領域における物理の理解が大きく進展した．特に**BPS状態**と呼ばれる超対称性で保護された状態のスペクトルの研究においてTBA方程式が現れた．BPS状態のスペクトルは真空の変化により**壁越え現象**を起こし，その変化はTBA方程式で解析された．このTBA方程式の壁越え公式とWKB周期の不連続性を表すデラバエレ–ファムの公式との関係が筆者を含むグループにより明らかにされた．さらにこの対応により，これまで困難であった一般の多項式型ポテンシャルの場合の量子力学のスペクトル問題を量子可積分模型のTBA方程式で定式化する強力な手法が与えられた．

以上のようにODE/IM対応は，常微分方程式のWKB解析，量子可積分模型，超対称ゲージ理論といったある意味全く異なる対象を結びつける不思議かつ興味深い対応となっており，それぞれの分野に新しい発展をもたらしている．

——用語解説——

量子可積分模型：
模型の自由度（一般に無限個）と保存量の数が一致するような量子系．例えば1次元スピン1/2 XXZ模型等，そのボルツマン因子がYang–Baxter方程式をみたすなどの代数的な背景がある．

TBA方程式：
熱力学的ベーテ仮説（Thermodynamic Bethe Ansatz）方程式の略称．擬粒子とその相互作用行列で記述される2次元可積分な場の理論において擬粒子のエネルギー（擬エネルギー）を決定する非線形積分方程式．

完全WKB解析：
1次元シュレーディンガー方程式の解を，古典解から出発し，プランク定数$\hbar$のべき展開で表すWKB（Wentzel–Kramers–Brillouin）近似を全てのオーダーまで足し上げる方法．ボーア–ゾンマーフェルト周期は全ての$\hbar$補正を含むWKB周期におきかわる．

Y-系：
Y-関数と呼ばれる，擬エネルギーの指数関数のみたす差分方程式．Al. B. Zamolodchikovにより定式化された．

BPS状態：
超対称代数の表現の分類で現れる，表現空間の次元の小さい多重項に属する状態．連続的変化では多重項の次元は変わらないため量子補正によりBPS状態からずれることはない．BPSはBogomolnyi–Prasad–Sommerfieldの略．

壁越え現象：
真空のパラメータ（モジュライ）の変化によりBPS状態の束縛状態や分裂が起きる現象．