ブラックホール準固有振動と固有値問題の数理

初田泰之 〈立教大学理学部　yhatsuda@rikkyo.ac.jp〉
木村匡志 〈第一工科大学東京上野キャンパス/立教大学理学部　m.kimura@ueno.daiichi-koudai.ac.jp〉

連星ブラックホールが合体した直後に放出される重力波はしばらく減衰振動を示す．この段階はリングダウン期と呼ばれ，合体後のブラックホールに固有の振動の重ね合わせと理解される．その振動数を読み取ることができれば，ブラックホールの質量や角運動量を推定できるだけでなく，ニュートン重力では記述できず一般相対論的効果が本質的となるブラックホール近傍の強重力場において，一般相対性理論がどこまで正しいかを検証することもできる．

この固有の減衰振動は**ブラックホールの準固有振動**と呼ばれる．太鼓の音がその形状や大きさを反映するように，ブラックホール準固有振動は時空の幾何を反映する．ただし，普通の固有振動とは異なり，波は遠方へ逃げ，またブラックホールの地平面へ吸い込まれる．そのため振動数は一般に複素数となり，虚部が時間減衰を表す．数学的には，入ってくる波がなく，外へ出ていく波だけが残るという境界条件を課した固有値問題になる．また，十分遠方かつ十分未来における重力波の振る舞いを Green 関数を用いて解析すると，準固有振動はその極として現れる．これは，そのような時空領域では，重力波が準固有振動の重ね合わせとして記述されることを意味している．

球対称ブラックホールの場合，重力摂動の方程式は，山型の有効ポテンシャルを持つ 1 次元 Schrödinger 方程式と同じ形に書き直せる．この対応により，準固有振動は量子力学の散乱における共鳴状態と同じ数理構造を持つことがわかる．この類似性は，ブラックホール準固有振動の理解において，量子力学で培われた考え方が有効であることを意味している．

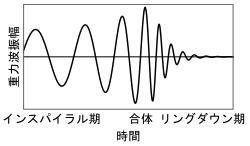
山型ポテンシャルの共鳴状態は，適当なパラメータを導入することで，井戸型ポテンシャルの束縛状態を解析接続したものとして捉えられる．井戸型ポテンシャルではエネルギー固有値をパラメータに関して摂動展開できる．この級数は一般に発散するが，解析接続と，発散する摂動級数を適切に意味づける Borel 総和法を組み合わせることで，共鳴状態の複素エネルギーへと意味づけられ，ブラックホールの準固有振動数が得られる．

もう一つの重要な応用は，ブラックホール時空や重力理論を少し変形したときの摂動論である．一般相対性理論を超える重力理論では，有効ポテンシャルに小さな補正が加わることが多い．このとき準固有振動数も変化するため，その補正を計算できれば，観測されたリングダウン波形が一般相対性理論からどの程度ずれるかを予測できる．ただし，量子力学の教科書にある束縛状態の摂動論をそのまま使うことはできない．準固有振動の固有関数は地平面と無限遠で振動的に振る舞い，通常の意味では自乗可積分でない．そこで，波動関数と振動数を同時に展開し，非斉次方程式に同じ境界条件を課すことで，振動数の補正を定めることができる．

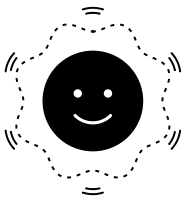
このように見ると，ブラックホールの準固有振動は，重力波物理だけに閉じた対象ではない．その解析には，量子力学で発展した共鳴，束縛状態，摂動論の考え方が有効に働く．また，準固有振動を支配する微分方程式は超幾何微分方程式を拡張した，多くの物理系に現れる Heun 型微分方程式の一種であり，場の量子論にも現れる数理構造と深く関係している．ブラックホール準固有振動を調べることは，強重力の観測だけでなく，異なる分野にまたがる数理構造を探る試みにもなっている．

――用語解説――

連星ブラックホール合体からの重力波：
連星ブラックホール合体に伴う重力波放出は，2体のブラックホールが重力波を放出しながら互いに接近していくインスパイラル期，ブラックホール同士が合体する合体期，および形成されたブラックホールが減衰振動するリングダウン期，の3つに大別される．



ブラックホール準固有振動：
ブラックホール時空の固有の振動モードのことであり，一般相対性理論においては，最終状態のブラックホールの質量と角運動量だけで振動数が決定される．振動数は複素数の値を取り，実部は通常の振動数，虚部は減衰率に対応する．リングダウン期における減衰振動は，準固有振動の重ね合わせとして理解することができる．



©2026 日本物理学会