量子探索とネットワークの協奏
――フラクタル格子上のスケーリング指数

渡部昌平[†]〈東京理科大学理学部第一部・さきがけ研究者　watabe@shibaura-it.ac.jp〉
佐藤　嶺〈東京理科大学大学院理学研究科　1221706@ed.tus.ac.jp〉
二国徹郎〈東京理科大学理学部第一部　nikuni@rs.tus.ac.jp〉

人間同士の関係やインターネット上の関係など現実世界には複雑なネットワークがあらゆるところに存在する．ビッグデータなどのデータ科学の進展と相まってこの複雑ネットワークの理解は急速に進んでおり，スケールフリー性・スモールワールド性だけでなく，お馴染みの**フラクタル**性なども存在することもわかってきた．さらに現在，**量子探索**のアルゴリズムが様々なネットワーク構造に適用され，ネットワークと量子探索が織りなす関係の理解が進んでいる．

フラクタル構造に着目した場合，その構造を特徴づける指標に**フラクタル図形の次元**というキーワードがある．ユークリッド次元 d_{E}・フラクタル次元 d_{f}・スペクトル次元 d_{s} がそれである．フラクタル次元とスペクトル次元は，ユークリッド次元と違い非整数値になる特徴をもつ．フラクタル図形を生成するとき一辺を何分割するかというスケーリング係数 s も特徴量の一つだ．

ネットワーク上の量子探索を理解するうえでは，ターゲットを見つけ出すための計算時間 Q が格子点数 N に対してどのようにスケーリングするかという問題が重要になる．特に，整数次元 d の格子では $Q\geq\max\{N^{1/d}, \sqrt{N}\}$ となるのだが，非整数次元の場合にこの d はユークリッド次元 d_{E} になるのだろうか？　フラクタル次元 d_{f} やスペクトル次元 d_{s} なのだろうか？　そもそもこのような関係式自体が存在するのだろうか？　2010年にPatelとRaghunathanが，シェルピンスキーギャスケットとシェルピンスキー四面体を用いて提案した一つの仮説は，スペクトル次元 d_{s} による $Q\geq\max\{N^{1/d_{\mathrm{s}}}, \sqrt{N}\}$ である．

著者らはシェルピンスキーカーペットや拡張されたフラクタル格子で幅広く調べ，仮説どおり確かにスペクトル次元 d_{s} によるスケーリングであることを確認した．計算時間のスケーリング指数は $d=2$ を境にして切り替わるが，この2次元近傍ではべき則から外れることもわかっている．スピン系などの相転移と同様，量子空間探索でも2次元が臨界的な次元になっている点は大変興味深い．

著者らのこの分野でのもう一つの貢献として，有効的計算時間に現れるスケーリング仮説の発見がある．ターゲットサイトでの最大発見確率 $P_{\max}$ とターゲットを発見する計算時間 Q は格子点数に対してそれぞれ $P_{\max}\propto N^{-\alpha}$ と $Q\propto N^{\beta}$（ただし α, $\beta>0$）のようにべき的に振る舞う．確率から見ると試行回数 $1/P_{\max}$ 程度でターゲットの発見を期待するが，量子振幅増幅の議論から試行回数は $1/\sqrt{P_{\max}}$ 程度でよい．これとオラクルの演算回数としての計算時間 Q を合わせて，有効的計算時間 $Q_{\mathrm{eff}}\equiv Q/\sqrt{P_{\max}}$ を新たな指標として導入してみよう．

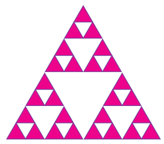
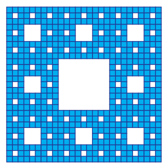
この有効的計算時間は $Q_{\mathrm{eff}}\propto N^{c}$（ただし $c=\beta+\alpha/2$）とスケールされるが，このスケーリング指数 c が，フラクタル図形の特徴量の組み合わせ

$$c=\frac{d_{\mathrm{s}}}{d_{\mathrm{E}}-1}+d_{\mathrm{f}}-s$$

で数値誤差の範囲内で高精度に与えられることがわかった．この仮説は，フラクタル構造を特徴づけるユークリッド次元・フラクタル次元・スペクトル次元・スケーリング係数が一つにまとまって現れるという意味でとても興味深い関係式になっている．現在のこのスケーリング指数に数学的証明は存在せず未解決問題となっている．

用語解説

フラクタル：
一見複雑に見える形状が小さな同じパターンの集合で表せるという数学的概念．自己相似性ともいう．海岸線の形状・ブロッコリー・木の枝など自然界にもよくみられる図形．フラクタルのコンセプトを単純な図形に適用したものにシェルピンスキーギャスケット（図(a)）やシェルピンスキーカーペット（図(b)）などがある．

(a)

(b)


量子探索：
量子力学的効果を用いてデータベースからターゲットを高速に探索する手法．データベース内に N 個の項目がある場合，古典的な線形探索では $O(N)$ の計算時間がかかる．しかし，量子探索としてGroverのアルゴリズムを用いると $O(\sqrt{N})$ で高速化できる．格子空間上でのターゲットサイトの探索を本記事では量子空間探索と呼ぶことにする．

フラクタル図形の次元：
フラクタル図形を特徴づける次元には次の3つがある．(1) フラクタル図形が埋め込まれている空間を表すユークリッド次元 d_{E}，(2) 図形の一辺の長さと面積（体積）の関係を与えるフラクタル次元 d_{f}，(3) フラクタル格子上をランダムウォークする際の再帰時間に関するスペクトル次元 d_{s} である．

[†] 現所属：芝浦工業大学工学部