ソリトン理論によるＰＴ対称ポテンシャルの構成

物理学での新しい現象や手法の発見は、科学技術の発展に役に立つと同時に、私たちの自然観をさらに豊富にしてくれる。ニュートン力学が定式化されたのは 300 年以上前（1687 年、プリンキピア）であるが、非線形力学現象を特徴づけるカオス、ソリトンなどの新しい概念・現象が導入されたのはほんの 30 年ほど前のことである。すなわち、ニュートン力学でさえも、それが内蔵している物理をすべて理解し制御できているわけではない。量子力学の導入は 1925 年であるから、誕生からまだ 80 年しか経っていないともいえる。多くの点で、量子力学にはさらに理解を深められる問題がある。これから述べるＰＴ対称ポテンシャルもその一例であろう。

量子力学はいくつかの基本原理から成り立っている。そのひとつに、観測される量は、エルミート演算子で記述され、実数値をとる、という原理がある。例えば、エネルギーの測定値は実数で与えられるのであるから、エネルギー演算子（ハミルトニアン演算子）はエルミート演算子でなければならない。この原理を、分析してみよう。まず、エルミート演算子の固有値は実数である。境界条件に充分注意を払うならば、これは正しい。では、その逆はどうであろうか。最近、エルミート演算子でなくても、その固有値は実数になり得ることが分かってきた。すなわち、エルミート性は、固有値が実数であるための十分条件であり、必要条件ではない。エネルギーの固有値問題に、話を戻すと、ここで登場するのが、ＰＴ対称ポテンシャルという物理系である。Ｐはパリティをさし空間反転（ｘ→-ｘ）、Ｔは時間反転（ｔ→-ｔ）を意味する。物理系がこの二つの合成変換、ＰＴ変換、に対して変わらないとすると、そのハミルトニアンは一般にエルミート演算子ではなくなるが、実数のエネルギーをもつ。いま一次元の複素ポテンシャル問題（ポテンシャルをＵ(x)とする）を考えると、ＰＴ対称ポテンシャルは条件 U(x)=U*(-x)を満たし、その実数部分は座標の偶関数、虚数部分は奇関数となる。

複素ポテンシャルをもつ非エルミート・ハミルトニアンは多くの系が提唱され研究されてきた。時として、なぜそのような系から出発するのか分からない場合がある。最近、東京理科大学の和達三樹氏は、ソリトン理論の視点で見ると、ＰＴ対称ポテンシャルが統一的に構成できることを示した。この結果は、日本物理学会発行の英文学術誌 Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)の 2008 年 7 月号に掲載される。

本研究のアイデアは、一階微分のディラック型固有値問題から出発して、二階微分のシュレディンガー型固有値問題と関連付けることにある。この変換により、ディラック型固有値問題の実数ポテンシャルは、シュレディンガー型固有値問題の複素ポテンシャルとなる。そして、条件 U(x)=U*(-x)を自然に満たすことができる。ソリトン理論の言葉で言えば、変形コルトウェーグ・ドフリース方程式とソリトン解がその一例である。こうして、Ｎ－ソリトン解に対応して、Ｎ個のパラメータを持つＰＴ対称ポテンシャルが構成できた。ソ

リトン方程式は、変形コルトウェーグ・ドフリース方程式以外にも多数ある。また、周期的な解を用いることができる。これらの拡張はさらに多彩なＰＴ対称ポテンシャルを与える。このように、提起された数理的手法は強力であることから、量子力学・数理物理分野の多くの研究者から注目を集めている。

　ＰＴ対称ポテンシャルや非エルミート・ハミルトニアンの理論は、凝縮系物理、量子情報、量子場理論と関連し、多くの研究が進んでいる。一時代前ならば、なぜ物理系のハミルトニアンはエルミート演算子なのですか、と質問したならば、全く筋の悪い学生・研究者と思われたであろう。常識とも思われる制限をはずしてみると、意外な発展がある。量子力学にはまだまだ興味深い概念・現象・拡張が隠されているようである。

論文掲載誌:　J. Phys. Soc. Jpn. **77** (2008) No. 7 p.074005
電子版:　http://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/77/074005　(7 月 10 日公開)
<情報提供:　和達三樹（東京理科大学) >