

## 制御の問題から見る量子と古典のつながり

量子・古典力学におけるハミルトニアンは、状態の時間変化を定める役割を果たすと同時にエネルギーという意味ももつ。ハミルトニアンを時間的に変動させると時間変化の仕方も変わるが、ハミルトニアンはエネルギーを担う部分と変化の仕方を変える部分に分割される。本論文では、近年量子力学系において制御の観点から理解されるようになったこの性質を古典力学系にまで拡張している。鍵となるのは、新たに導入される一般化された作用である。前期量子論において重要な役割を果たした断熱不変量を包含する量であり、量子と古典のつながりを一般に特徴づける。

ハミルトニアンをゆっくり変えることによって系の状態をなるべく乱さないで変化させる断熱遷移の理論には長い歴史がある。古典系の断熱過程で定義される断熱不変量は前期量子論において量子と古典のつながりを理解するのに重要な役割を果たしている。また、近年では量子系を実際に制御する目的でさまざまな応用がなされている。

ゆっくり変えないと系が乱されてしまうが、そのような乱れ（非断熱遷移）を防ぐ項を導入すると、どんなに速くしてもゆっくりのときと同じ状態変化を得ることができる。これは近年 *Shortcuts to Adiabaticity* という名で量子系の制御の問題に積極的に応用されている<sup>1)</sup>。古典系への適用も考えられているが、応用は限定的なものであり、量子系の場合との関係もよくわかっていなかった<sup>2)</sup>。手法の原理的な面において重要な役割を果たす断熱定理は量子・古典それぞれでよく知られているが、記述の仕方がかなり異なることもあってそれらの関係は決して自明ではない。

東京工業大学大学院理工学研究科の奥山真佳と東京工業大学理学院の高橋和孝は、古典力学において断熱制御の理論を定式化し、ハミルトニアンが満たすべき方程式の解が非線形可積分系における無分散 Korteweg–de Vries (KdV) 階層から得られることを示した。また、Hamilton–Jacobi 理論より新たに定義される一般化された作用を用いて量子と古典の対応関係を明らかにした。この成果は、日本物理学会が発行する英文誌 *Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ)* の 2017 年 4 月号に掲載された。

断熱制御の古典理論を定式化したことには主に以下の 4 つの意義がある。

(i). ハミルトニアンはふたつに分割され、それぞれエネルギーを担う部分と状態の時間発展の仕方を変化させる部分という意味をもつ。このような分割は制御の問題に限らず時間依存する系一般において成り立ち、Hamilton 力学系の時間発展について新奇な視点をもたらす。

(ii). ハミルトニアンが満たすべき方程式は古典非線形可積分系において可積分性を表す Lax 方程式と同じものになる<sup>3)</sup>。この関係を用いると、KdV 階層や戸田階層などの無限に存在する厳密解のシリーズを、原理的には全て量子系の制御ハミルトニアンに対応させることができる。逆散乱法などの量子力学的な手法を用いて可積分系の問題を解くことができるのはよく知られているが、そのような見方や手法が量子系のダイナミクスの問題にそのまま適用される。KdV 階層などの解は無分散極限というものをとることができて、これが古典系の制御ハミルトニアンに対応している。可積分系では系の力学的自由度の数ほどの保存量が存在するが、このことは対応する量子・古典力学系において断熱性を表現するものとなる。また、この対応を用いることで非線形可積分系のさまざま

な性質を量子・古典力学系において調べられるようになる。

(iii). 一般化された作用は断熱不変量を拡張した量とみることができる。通常の古典断熱定理はパラメータが一定のときに周期軌道になるようなものに対して適用され、断熱条件は周期時間を用いて表される。一般化された作用はそのようなことを気にせずに導入することができて、系を特徴づける量となる (図)。断熱条件を用いる必要もない。

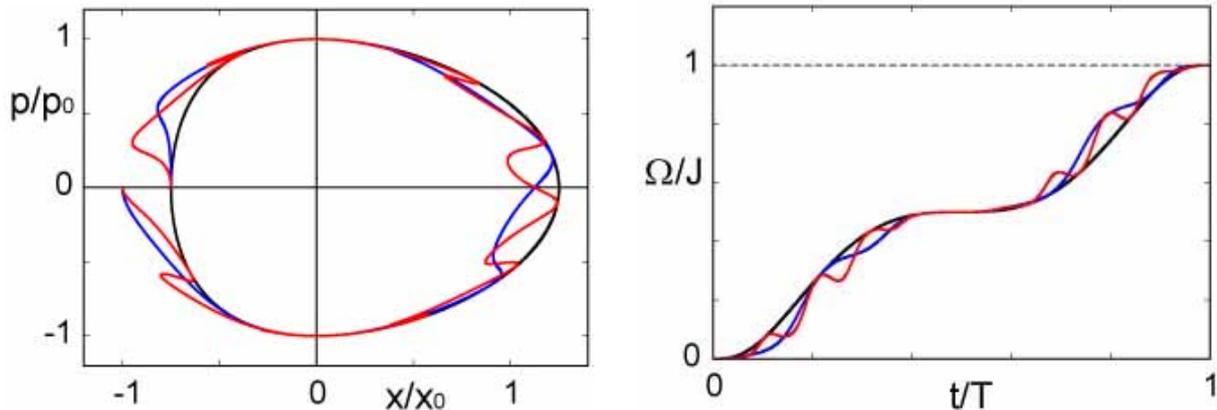


図 (左) : 1次元系における粒子の運動を相空間における軌道として表す。ポテンシャルが一定のとき周期軌道 (黒線) を描くが、時間的に変動させたときの軌道 (青・赤) は一般に閉じない。(右) : 図左のそれぞれの軌道に対応する一般化された作用  $\Omega$  の時間依存性。この系では、時間  $t$  が図左黒線の軌道の周期時間  $T$  になったとき全ての  $\Omega$  は断熱不変量  $J$  に等しくなる。

(iv). 量子系における Schrödinger 方程式の古典極限には Hamilton–Jacobi 方程式が含まれていることはよく知られているが、その対応が時間に依存する一般の系にまで拡張される。そしてそれは一般化された作用が量子系の波動関数にかくれていることを示している。この量に注目することで量子系と古典系の対応関係を調べることができる。

本研究で得られた成果によって量子系で実現させるのが難しい問題を対応する古典系で調べることができるようになる。他にも原理的および実用的な観点の両方においてさまざまな応用が考えられる。今後思わぬ方向に発展していくことを期待したい。

#### 参考文献

- 1) E. Torrontegui, S. Ibáñez, S. Martínez-Garaot, M. Modugno, A. del Campo, D. Guéry-Odelin, A. Ruschhaupt, X. Chen, and J. G. Muga, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **62**, 117 (2013).
- 2) C. Jarzynski, *Phys. Rev. A* **88**, 040101(R) (2013).
- 3) M. Okuyama and K. Takahashi, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 070401 (2016).

#### 原論文

[Quantum-Classical Correspondence of Shortcuts to Adiabaticity](#)

[Manaka Okuyama and Kazutaka Takahashi, \*J. Phys. Soc. Jpn.\* \*\*86\*\*, 043002 \(2017\).](#)

問合わせ先 : 高橋 和孝 (東京工業大学理学院)