

## 1 次元 Kardar-Parisi-Zhang 方程式：高さ分布と普遍性

ここ数年、「KPZ 方程式」や「KPZ 普遍性」というキーワードが注目を集めている。しかもその現れ方は「KPZ 方程式に厳密解が見つかった」「KPZ 普遍性が実験でも確認された」「ランダム行列にも関係するようだ」「KPZ 方程式を定義した M. Hairer がフィールズ賞を受賞した」といった具合で、かなりバラエティに富んでいる。

ここでいう KPZ は、Kardar, Parisi, Zhang の 3 人の名前の頭文字を並べたもので、元々界面の成長を記述するモデルとしてノイズ有り非線形偏微分方程式を彼らが導入し、それがその後彼らの名を冠して呼ばれるようになった。(KPZ というと、Knizhnik, Polyakov, Zamolodchikov の 3 人の頭文字を並べたものもあるので注意が必要である。)

この KPZ 方程式の導入は 1986 年のことであったが、当時からフラクタルやスケーリングとの関係で注目されて盛んに研究され、くりこみ群やシミュレーションの結果を元に大枠での理解はかなり進み、1990 年代半ばまでにはすでにある意味成熟して活発な分野でなくなったように見えた。方程式が非線形であるため解析的にできることが限られている（ように思われた）ことや、普遍的と予想された指数が実験でなかなか見つからなかったことも影響していたかもしれない。いずれにせよ KPZ 方程式を、そのような時代状況を含めて以前から知っている人にとっては、近年 KPZ 方程式が話題になっていると言われても、最初は「なぜ今いまさら KPZ 方程式？」と思われるのも当然と言える。

近年になって KPZ 方程式が改めて注目されるようになったといっても、以前の研究を知らない世代が別の文脈で同じ方程式を見出して以前と同様の興味を持って研究している、というわけではない。KPZ 方程式に関する問題が、実は全く別の問題と関係していることが見出され、その対応を発展させる中で以前の研究では思いもよらなかった深い理解が得られるようになり、そこから全く新たな進展が起こっているのである。(ただし近年の発展は 2 次元中の 1 次元の界面の成長に関するものが中心である。)

この対応の主要な結論を一言でいうと、「KPZ 方程式で記述される界面の高さの普遍的な分布は、ガウシアン・ユニタリ・アンサンブル(GUE)と呼ばれるランダム行列の最大固有値分布と等しい」となる。1990 年代半ばまでの研究においては、主としてスケーリングの指数に興味集中していたのに対し、近年の研究においては、より詳細な「高さ分布」という情報が得られるようになってきたのである。独立な多数の要素から成る系の揺らぎがガウス分布することはよく知られているが、相互作用のある非平衡系における分布をこのように明示的に求めることができたのは、驚くべきことである。

前段落で述べたことは、一見極めて数学的な内容に聞こえるかもしれない。難しい問題に取り組むのが好きな理論家が数学的に美しい対応関係を見つけたという話に聞こえたかもしれない。しかし現象の普遍性を信じると、界面成長でランダム行列の最大固有値分布が得られるという結果は、実験でも見出されてしかるべきである。実際にそのような実験が行われ、理論の予言は見事に確認された。

KPZ 方程式を厳密に扱う理論は、ランダム系、レプリカ法、可積分系、多変数直交多項式、確率解析といった様々な分野を巻き込みながら、その後も発展を続けている。また、元々KPZ 方程式は界面成長を記述する目的で導入されたが、その普遍的な性質はより一般の1次元系でも見出されるという予想が提出され、異常熱輸送の問題とも関連して盛んに研究されている。

以上述べてきたように、KPZ 方程式にまつわる研究は近年拡大してきており、そのため関連するキーワードを耳にする機会も増えている。しかし、問題は、研究の発展が急速で多岐に渡るため、その全体像をつかむことが難しいことである。

本論文は、KPZ 方程式そのものについても知らない読者に対し、近年の進展まで含めて一通りの内容を伝えるコンパクトなレビュー論文である。若い研究者はもちろん、1990年代半ばまでの状況を知っている人にとっても、有用な文献となると思われる。

## 原論文

(2016年2月21日公開済み)

The one-dimensional Kardar-Parisi-Zhang equation: height distribution and universality, Tomohiro Sasamoto,

Prog. Theor. Exp. Phys. 2016, 022A01 (2016), DOI: 10.1093/ptep/ptw002

<情報提供：笹本智弘（東京工業大学 准教授）>

図： 界面成長観測データ（黒点線・破線）とランダム行列の最大固有値分布（色○△等）（Takeuchi et al., Sci. Rep. 1 (2011) 34 より）

