して核融合プラズマの特性を明らかにする為にも，また，先進的なトカマクコンセプトを創り出す為にも，極端非円形プラズマの研究がますます盛んになる事を望む次第である．

文 献

1) 山崎耕造：核融合研究 **54** (1985) 5.
2) J.W. Connor, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 49.
3) F. Troyon, *et al.*: *Proc. 11th Europ. Conf. Controlled Fusion and Plasma Physics, Aachen, 1983*, Plasma Phys. **26** (1983) 209.
4) A. Sykes, *et al.*: *Proc. 11th Europ. Conf. Controlled Fusion and Plasma Physics, Aachen, 1983* (European Physical Society, 1983) Vol. 2, p. 363.
5) L.C. Bernard, *et al.*: Nucl. Fusion **23** (1983) 1475.
6) K. Yamazaki, *et al.*: Nucl. Fusion **25** (1985) 1453.
7) H. Yokomizo, *et al.*: *Proc. 9th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Baltimore, 1982* (IAEA, Vienna, 1983) Vol. 3, p. 173.
8) H.R. Strauss: Phys. Fluids **17** (1974) 1040.
9) G. Becker, *et al.*: Nucl. Fusion **18** (1978) 1653.
10) G. Becker, *et al.*: Nucl. Fusion **25** (1985) 705.
11) R.D. Stambaugh, *et al.*: *Proc. 10th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984* (IAEA, Vienna,, 1985) Vol. 1, p. 217.
12) K. McGuire, *et al.*: *Proc. 10th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984* (IAEA, Vienna, 1985) Vol. 1, p. 117.
13) M. Okabayashi, *et al.*: *Proc. 10th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984* (IAEA, Vienna, 1985) Vol. 1, p. 229.
14) M. Keilhacker, *et al.*: *Proc. 10th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984* (IAEA, Vienna, 1985) Vol. 1, p. 71.
15) Y. Hamada, *et al.*: *Proc. 10th Int. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, London, 1984* (IAEA, Vienna, 1985) Vol. 3, p. 353.
16) DIVA Group: Nucl. Fusion **20** (1980) 271.
17) K. McGuire, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 891.
18) M.N. Rosenbluth, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1967.
19) J. Manickam, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1959. M. Chance, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1963.

スピングラスの最近の理論

高 山 一

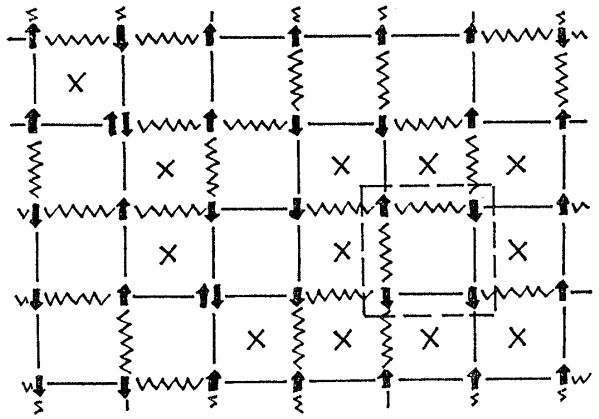
競合する強磁性相互作用と反強磁性相互作用とがランダムに分布したスピングラス系において，比熱の異常を伴わない帯磁率のカスプに代表される相転移様現象が観測される．この転移の本質を巡って，エドワーズ・アンダーソン (Edwards-Anderson) 理論以来精力的な研究が続けられている．最近になって，転移が熱力学的な相転移であるとした場合の理論的基礎が確立された．スピングラスの平均場理論である．この理論のレプリカ法に基づく数理的構造と結果の物理的解釈を解説し，実験結果との比較から，今後の問題点を指摘したい．

§1. はじめに

競合する相互作用がランダムに分布したスピングラス (以下 SG と略す) の本質は何かと問われれば，それは‘エネルギー的にほぼ縮退した多数の準安定状態が存在すること’と筆者は答えたい．第1図は $\pm J$ イジング SG と呼ばれる模型での一つのスピン配位である．図中↑↓で示されたサイトのスピンはどちらの向きでも系のエネルギーは変わらないし，破線で囲んだクラスターを反転させても同様であり，もっと大きなスケールでみればより大きなクラスターの反転についても同様の情況があり得るだろうことは容易に想像される．これが上記の答の意味するところである．このような系，即ちフラストレーションがランダムに分布した系ではどのような協力現象が起こり得るだろうか，これがSG問題である．ランダム系の統計力学の一つの成果として，コヒーレント・ポテンシャル近似に代表される有効媒質近似法がある．この方法においては，1個のスピンや小さなクラスターを調べるとき，周囲をサンプルに関する平均

京都大学基礎物理学研究所
606 京都市左京区北白川追分町

NII-Electronic Library Service



第1図　$\pm J$イジングSGのスピン配位の例．——(〰〰)は(反)強磁性相互作用 $J(-J)$ を表わす．×印のついた単位格子については，これを囲む四つの相互作用すべてからエネルギー利得を生むようなスピン配位はない．この相互作用ループはフラストレートしているというが，SGではフラストレーションが空間的にランダムに分布している．容易に確かめられるように，↑↓のサイトのスピンはどちらを向いても全系のエネルギーは変わらない．また，破線で囲んだクラスターについても同様である．

まで含めた均一な有効媒質で置換してしまうため，各サンプルにおける上述の準安定状態の存在に起因する情報が捨て去られてしまう．SG問題の本質を探るためには有効媒質法に代わる新たな方法論が必要であった．

1975年Edwards-Anderson(EA)はSG転移に関する基礎理論を発表した.[1]　まずSG現象の本質を記述する最も単純化されたハミルトニアンを

$$\mathscr{H}_J=-\sum_{\langle ij\rangle}J_{ij}S_iS_j-\sum_i h_iS_i \qquad (1)$$

とおく(以下しばらくイジングSGに限る)．但しスピン間相互作用 J_{ij} はガウス分布

$$P(J_{ij})=\left(\frac{z}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{z}{2J^2}\left(J_{ij}-\frac{J_0}{z}\right)^2\right\} \qquad (2)$$

に従う，互いに独立なランダム変数である(zは各スピンに働く J_{ij} の数)．一つのサンプルは(2)式の分布を満たすような1組の $\{J_{ij}\}$ で与えられ，サンプルに関する平均(以下 $[\ ]_J$ で表わす)は各 J_{ij} に関して(2)式の分布で評価する．各サンプルにおいて，ある臨界温度 T_c 以下でSG秩序が出現する．即ち，その相対的な向きは J_{ij} のランダムネスを反映して全くランダムではあるが各スピンは凍結していると考える．EAはこのSG秩序を特長づける秩序変数として各スピンの長時間相関の平均値

$$q_{EA}\equiv\lim_{t\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\langle S_i(0)S_i(t)\rangle_T \qquad (3)$$

あるいは，これとほぼ同等で，時刻 t を陽に含まない

$$q\equiv\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_i\langle S_i\rangle_T^2 \qquad (4)$$

を導入した(Nは全スピン数，$\langle\ \rangle_T$ は熱平均を表わす)．(4)式の q などを具体的に評価するためEAはレプリカ法と呼ばれる以下のような数学的手法を採用した．熱力学量のような巨視変数はサンプルによらないことから，各サンプルの自由エネルギー F はサンプルに関する平均値として評価できる(self-averaging 性と呼ぶ)：

$$\beta F=-[\ln Z_J]_J=-\lim_{n\to0}\frac{1}{n}[\{Z_J{}^n]_J-1\}. \qquad (5)$$

$\beta=1/k_BT$, $Z_J=\mathrm{Tr}\exp(-\beta\mathscr{H}_J)$は各サンプルの分配関数．$\ln x$ の恒等式表現を用いて書かれた(5)式の最終式において，$Z_J{}^n$ は全く同じ $\{J_{ij}\}$ の組をもつ n 個の複製された系(レプリカ)からなる一つのスピン系の分配関数とみなされる．その nN 個のスピンに関する状態和をとる前にJ平均を実行してしまうのがレプリカ法である．この結果($h_i=h$として)

$$[Z_J{}^n]_J=\mathrm{Tr}_{\{S_i{}^a\}}\exp\left[\frac{\beta^2J^2}{2z}\sum_{a,b=1}^{n}\sum_{\langle ij\rangle}S_i{}^aS_j{}^aS_i{}^bS_j{}^b+\sum_{a=1}^{n}\left\{\frac{\beta J_0}{z}\sum_{\langle ij\rangle}S_i{}^aS_j{}^a+\beta h\sum_i S_i{}^a\right\}\right] \qquad (6)$$

となり，ランダム系の問題が，異なるレプリカ(指標 a,b で指定)にあるスピン間にも相互作用が存在する，空間的には均一なスピン系の熱力学に帰着する．

以上がEA理論の骨子とレプリカ法の導入部である．各サンプルでの情報をみる前にまずJ平均をしてしまう．このレプリカ法に対して筆者は当初，有効媒質近似法に対していだいたと同じ疑問を持った．たとえ最終的な熱力学量の値は正しいとしても，SG問題の本質をどれ程明らかにすることができるのだろうかと．しかし，Parisiが与えたレプリカ法の解[2]はSG現象の本質を見事に反映していることが，最近になって明らかにされた．その経過，即ちSGの平均場理論の発展を次節で解説する．

NII-Electronic Library Service

SG秩序は一様自発磁化は伴わないが，SG相において磁場で誘起された磁化は磁場を切ってもすぐには消失しない．この残留磁化は特徴的な長時間緩和現象を示す．あるいは交流帯磁率におけるカスプ温度が測定周波数に依存するように，SGの動的特性はその本質と密接にかかわりあっている.[3,4] 第3節では，このような長時間緩和現象を中心にして，平均場理論の結果と現実のSG系で観測される実験結果とを比較し，問題点を指摘したい．

§2. SGの平均場理論

2-i SK模型とレプリカ対称解

新しいタイプの相転移描像を得ようとするには，まず熱ゆらぎの高次効果が無視できる平均場理論を考えるのが通常の手続きである．このために平均場近似が厳密に成立するモデル系，即ちJ_{ij}が無限レンジで，すべてのスピン対に働く系を考える．SGの場合，それはシェリントン・カークパトリック(Sherrington-Kirkpatrick, SK)模型[5]と呼ばれ，(1),(2)式でzを$N-1(\simeq N)$としたものである(以下$\langle\ \rangle$のついた和記号はすべての対に関する和を表わす)．レプリカ法で導出されるレプリカ・スピン系の均一な相互作用，(6)式，もまた空間的に無限レンジ型である．この類の相互作用系の分配関数に関しては一般的な処方箋が知られている.[6] 即ち，相互作用項の適当な並び替えと補助場の導入で空間的には1サイト問題に還元し，積分表示で表わされた分配関数を$N\to\infty$の極限で鞍点法で評価する．今の問題では，(6)式において相互作用がすべてのレプリカ対の間に存在するため，それぞれ$n(n-1)/2$個とn個の補助場Q_{ab}とM_aとが必要であり，系の自由エネルギーは次式のような$n(n+1)/2$次元変数空間の鞍点値として与えられる：

$$f\equiv\lim_{N\to\infty}\frac{F}{N}=\left[\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\mathrm{Min}\, f_n\{Q_{ab},M_a\}\right], \tag{7}$$

$$\beta f_n\{Q_{ab},M_a\}=-\frac{\beta^2J^2}{4}n+\frac{\beta J_0}{2}\sum_a M_a^2$$
$$+\frac{\beta^2J^2}{2}\sum_{\langle ab\rangle}Q_{ab}^2-\ln\left(\mathrm{Tr}_{\{S^a\}}\exp\left(-\beta\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}^{(n)}\right)\right), \tag{8}$$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}^{(n)}=-\beta J^2\sum_{\langle ab\rangle}Q_{ab}S^aS^b+\sum_a(J_0M_a+h)S^a. \tag{9}$$

(7)式の鞍点条件は，自己無撞着方程式

$$Q_{ab}=\langle S^aS^b\rangle_{\mathrm{eff}},\quad M_a=\langle S^a\rangle_{\mathrm{eff}} \tag{10}$$

となる($\langle\ \rangle_{\mathrm{eff}}$は(9)式の$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}^{(n)}$での熱平均)．(7)～(10)式がレプリカ法の基本式である．その解Q_{ab}を用いれば(4)式のqは，

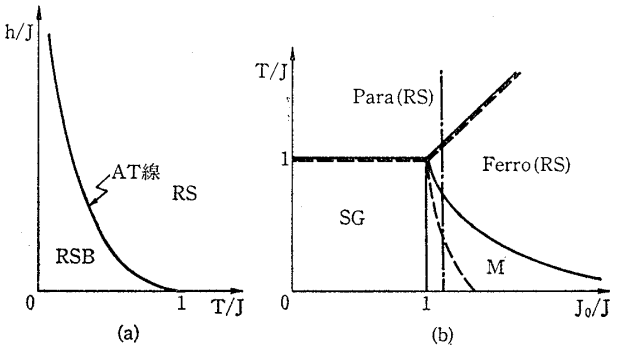
$$q=\lim_{n\to 0}\frac{2}{n(n-1)}\sum_{\langle ab\rangle}Q_{ab}. \tag{11}$$

また一様磁化mは$m\equiv[\langle S_i\rangle_T]_J=\lim_{n\to 0}n^{-1}\sum_a M_a$で与えられる.[7]

SKは，(9)式の$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}^{(n)}$がレプリカ指標について対称であることから，(8)式の鞍点解も同じレプリカ対称性(以下RSと記す)をもつものと仮定し，すべての組$\langle ab\rangle$およびaについて$Q_{ab}=q, Ma=m$とおいて(7)～(10)式を解いた．このSK解はEA理論が予想するようなSG転移，即ち，有限な臨界温度T_c以下で秩序変数qが出現する相転移を再現する．$J_0\leqq J$の系でのT_cはJ_{ij}の分散に等しく，$T_c=J$，そこで線形帯磁率χ_0にカスプを生じる．さらに非線形帯磁率χ_2の負の発散[8,9]

$$\chi_2\equiv\frac{1}{3!}\frac{\partial^3m}{\partial h^3}\bigg|_{h=0}\simeq-\frac{1}{2|\varepsilon|}, \tag{12}$$

$\varepsilon\equiv(T-T_c)/T_c$や，$J_{ij}$の平均値がその分散より大きくなると出現する強磁性への転移の様子(第2図(b))など，SG転移に固有と思われる現象が導かれた．特に第2図(b)の$T-J_0$相図において$J_0\gtrsim J$の様子をみると，温度の低下とともに常磁性相から強磁性相を経てSG相に転移しており，低温側に'無秩序'相が出現する点が注目される．リエントラント転移と呼ばれ，SGにおける主要な研究課題となっている.[10,11]



第2図　イジングSK模型のH-T相図(a)とT-J_0相図(b)．図(b)の破線はSK(RS)解から，実線はRSB解から導かれる．混在相Mでは強磁性でかつRSBを伴う．鎖線に対応するSGではリエントラント転移が起こる．

NII-Electronic Library Service

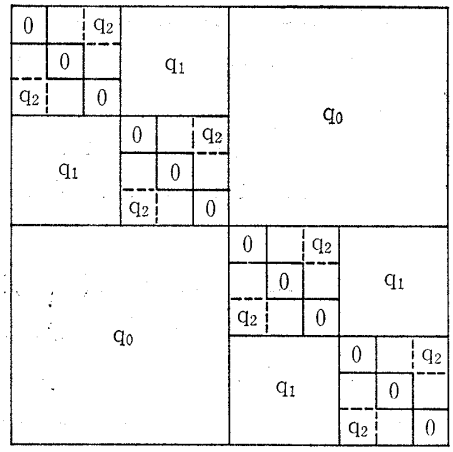
しかしながらSK解から計算されるエントロピーは低温で負になる．イジング・スピン系に関する理論として，これは致命的な欠陥である．de Almeida と Thouless (AT) は，その原因が鞍点解も RS 構造をもつとした SK の仮定にあることを示した．[12] RS を破る (Q_{ab} がレプリカ対 ab に依存する) 空間へのゆらぎに対してSK解は，まさにその解が SG 相を見出した温度領域において，不安定になる．レプリカ法によれば SG 転移は，高温側の RS 状態 (常磁性相) と低温側の Replica-Symmetry-Breaking (RSB) 状態 (SG 相) 間の相転移とみるのが正しい．この転移は有限磁場中でも存在するが，その臨界曲線は AT 線と呼ばれており，h が小さいとき

$$1-\frac{T_{\mathrm{AT}}(h)}{J}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{h}{J}\right)^{2/3} \qquad (13)$$

で与えられる (第2図(a))．

2-ii　Parisi のレプリカ非対称 (RSB) 解

それでは SG 相の自由エネルギーの正しい表式はどうなるのか．$n\to 0$ の操作があるため (7)～(9) 式は実質的に無限次元変数空間における鞍点問題であり，一般的な解法はない．Parisi[2] は以下のような RSB 構造をもつ鞍点解を導入した (以下 $J_0=0$ に限る)．n 個のレプリカを n/m_1 個のグループに等分割し，異なるグループに属するレプリカ間の Q_{ab} を q_0 とおく．それぞれのグループを m_1/m_2 個の小グループに等分割し，異なる小グループ間の Q_{ab} を $q_1(\geqq q_0)$ とおく．小グループの要素が1個のレプリカになるまでこの操作を M 回繰り返す ($Q_{aa}=0$)．得られる Q_{ab} を $n\times n$ 行列表示したものが第3図である ($n=12$, $M=3$ の例)．この行列 $\overrightarrow{Q}_{ab}$ と，各行 (列) に含まれる要素 q_i を用いて $1\leq x\leq n$ で定義される階段関数 $Q(x)$——$m_{i+1}<x<m_i$ で $Q(x)=q_i$——とは，和と積の演算を含めて1対1に対応させることができ，(8) 式を $Q(x)$ の汎関数積分として書き下せる．ここで $n\to 0$ の操作をとり ($m_i<x<m_{i+1}$ の順になるように $x=1$ で反転させる)，また分割数 M を無限大にすれば，$Q(x)$ は $0\leq x\leq 1$ で定義された単調増加関数となる．平衡状態は $Q(x)$ の汎関数積分表示された自由エネルギー f の停留条件から決定される．観測される熱力学量，例えば (4) 式の q や線形帯磁率



第3図　Parisi の RSB 構造の行列表現．

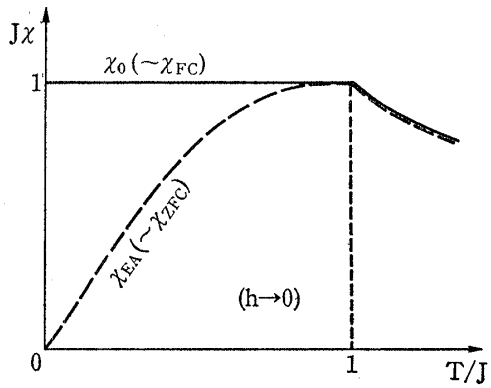
χ_0 はその解を用いて

$$q=\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x\equiv\bar{Q}\,, \qquad (14)$$

$$\chi_0=\beta(1-\bar{Q}) \qquad (15)$$

で与えられる．

f の表式は原論文[2,13]に譲るとして，その全温度領域における数値解析や，T_c 近傍での解析から以下のようなパリシ (Parisi) 解の性質が明らかにされている．低温極限でのエントロピー S は $S\propto T^2\geq 0$ となり SK の困難が解消される．$\bar{Q}$ は単純に $\bar{Q}=1-T/T_c$ で与えられ，従って χ_0 は SG 相では T によらない (第4図)．T_c 近傍での詳しい解析からは，解が (13) 式の AT 線で RS を回復する様子，RSB 相では m が h に対して特異なべき依存性 ($m-Jh\propto -h^{7/3}$) をもつこと，さらに RSB 解は marginally ではあるが安定であること[14] (鞍点解におけるヘシアン (Hessian) 行列が半正定値) などが示されている．以上のようにパリシ解は



第4図　イジング SK 模型の磁場中冷却帯磁率 $\chi_{\mathrm{FC}}=m_{\mathrm{FC}}/h$ (実線) と零磁場冷却帯磁率 $\chi_{\mathrm{ZFC}}=m_{\mathrm{ZFC}}/h$ (破線)．両者はそれぞれ χ_0 と χ_0^{EA} (2-iv 節 (23) 式以下を参照) に対応する．

NII-Electronic Library Service

SK 解の困難を克服し，物理的にも合理的な結果を与える．この意味で(7)～(9)式の正しい鞍点解であると考えられている．但し，Q_{ab} 空間から1次元変数空間 $Q(x)$ への写像，その上での $n\to 0$ 操作などに関する数学的な根拠はまだ明らかではない．

2-iii Thouless-Anderson-Palmer(TAP)理論[15]

レプリカ法で得られた RS↔RSB 転移は物理的にはどのような転移を意味するのか，また Parisi の秩序変数関数 $Q(x)$ は物理的に何を表わしているのか．この問に答えるためには各サンプルの熱力学的性質をレプリカ法によらずに調べなければならない．そのための理論として中心的な役割を果たしたのが TAP 理論である．TAPは，各サンプルの自由エネルギー F_J をサイト磁化 $m_i\equiv\langle S_i\rangle_T$ の関数として

$$F_J\equiv F_{TAP}\{m_i\}$$
$$=\frac{1}{2\beta}\sum_i\left\{(1+m_i)\ln\left(\frac{1+m_i}{2}\right)+(1-m_i)\ln\left(\frac{1-m_i}{2}\right)\right\}$$
$$-\sum_{\langle ij\rangle}J_{ij}m_im_j-\frac{\beta}{2}\sum_{\langle ij\rangle}J_{ij}(1-m_i^2)(1-m_j^2)\quad(16)$$

と与えた．TAP 自由エネルギーと呼ばれる (16) 式はサイトに依存する磁場のもとでの自由エネルギーのルジャンドル(Legendre)変換として導出できる．[16] (16)式から導かれる状態(TAP)方程式は

$$m_i=\tanh\beta h_i^{\rm eff}\quad(i=1,2,\cdots N)$$
$$h_i^{\rm eff}=h_i+\sum_j J_{ij}m_j-\beta m_i\sum_j J_{ij}^2(1-m_j^2)\quad(17)$$

となる．$h_i^{\rm eff}$ の第2項は通常の平均場(ワイス(Weiss)場)で，第3項は i-スピンが j-サイトに誘起した磁化が i-スピンにはね返ってくる効果をワイス場から差し引いたものでOnsager の reaction 場と呼ばれる．強磁性体に対する平均場模型 ($J_{ij}\sim J_0/N$) と違って SG の SK 模型では $J_{ij}\sim J/N^{1/2}$ であるためこの項を無視できない．この項がTAP方程式(17)，従って SG 転移を特徴づけている．実際(17)式から SG 相が単一の秩序変数では記述し得ないこと，[17] そのマージナル安定性[18]などを示すことができる．

2-iv TAP方程式の多重解(P状態)とパリシ解

パリシ解との関連で重要なのは，TAP 方程式(17)は極めて多数の解をもつことである．[19] しかも，間接的にはモンテカルロ法による数値実験[20]から，また最近根本ら[21]が行った F_J に関する直接的な数値解析から，これらの局所平衡解は $N^a(1/2>a>0)$ のオーダーの自由エネルギー障壁で互いに他と隔てられていることが示される．従って $N\to\infty$ の熱力学的極限において各々の局所平衡解はまさに熱平衡状態であり，特に Pure state (P状態) と呼ばれる．通常の強磁性体では全磁化が M か $-M$ かの二つの P 状態しかないが，SG では多数の P 状態が存在する．

SG 相では系はいずれか一つの P 状態を占めるが，そのときの熱力学的性質を求めるのに，ここでも self-averaging の考え方を導入して，多くのP状態に関する平均値として評価する．[7,22] α番目のP状態をその磁化パターン $\{m_i^\alpha\}$ で指定し，その出現確率を $P_\alpha=\exp[-\beta F_J\{m_i^\alpha\}]/\sum_\gamma\exp[-\beta F_J\{m_i^\gamma\}]$ とすれば，サンプル平均も含めた一様磁化 m，および(4)式の q は

$$m=[\sum_\alpha P_\alpha(N^{-1}\sum_i m_i^\alpha)]_J,\quad(18)$$
$$q=[\sum_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta q_{\alpha\beta}]_J\quad(19)$$

で与えられる．(19)式の $q_{\alpha\beta}\equiv N^{-1}\sum_i m_i^\alpha m_i^\beta$ は二つのP状態 α,β の重なりの程度を表わす．そこで一つのサンプルのP状態間の重なりが q (単なる数値)である確率

$$P_J(q)\equiv\sum_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\delta(q-q_{\alpha\beta})\quad(20)$$

を導入し，その J 平均 $P(q)\equiv[P_J(q)]_J$ を用いて

$$x(q)\equiv\int_{-1}^{q}dq'P(q')\quad(21)$$

を定義する．これは二つの P 状態間の重なりが q 以下である確率の J 平均だが，その逆関数 $q(x)$ を導入すると(19)式は

$$q=\int_{x(q_{\min})}^{x(q_{\max})}dxq(x)=\int_0^1dxq(x)\quad(22)$$

となる．(14)と(22)式から $q(x)=Q(x)$ とすることで TAP 理論と Parisi の RSB 解が結ばれる(両者の同等性を示すより詳しい議論については原論文[7,22,23]を参照されたい)．

以上のように，J_{ij}のランダムネスからその存在が直観的にも予想できる多数の準安定状態の存在は，平均場理論においては熱力学的にも安定なP状態として定式化され，レプリカ法におけるRSB解への移行として記述される SG 転移は，多数の

NII-Electronic Library Service

P状態が出現し始める転移と理解される．系はいずれか一つのP状態に落ち込むのだが，その熱力学的性質を個別に評価することはできない．しかし，P状態とサンプルに関するself-averaging性を利用して，それらに関する平均量としてなら解析的に算出できる．その具体的な処方箋をParisiのRSB解が与えているというわけである．またこのようなP状態描像に基づけばEAが最初に導入した(3)式と(4)式の秩序変数の違いを理解することができる．$N\to\infty$では系は他のP状態に移れないのだから(非エルゴード性)，(3)式$q_{\rm EA}$は一つのP状態での平均値であり，これは(22)式中の$q_{\max}$に他ならない．

$$q_{\rm EA}=[\sum_{\alpha} P_\alpha q_{\alpha\alpha}]_J=q_{\max}\,. \qquad (23)$$

(19)と(23)式の違いをみるため(18)式から線形帯磁率を算出してみよう．まずP_αを止めてm_i^αだけ磁場微分すると$(\partial m_i^\alpha/\partial h=\beta\{1-(m_i^\alpha)^2\})$, $\beta(1-q_{\rm EA})\equiv\chi_{\rm EA}$を得る．これに$P_\alpha$の磁場微分も加えると$\beta(1-q)\equiv\chi_0$，即ち(15)式を得る．$\chi_{\rm EA}$は一つのP状態の磁場に対する応答を表わし，熱平衡$\chi_0$は磁場による全体のP状態の再構築も含まれており，それが(19)式のqで表わされていると理解される．なお，(19)と(23)式に基づく数値解析からも，$q_{\rm EA}$とqの違い，および(19)式のqがパリシ解の$\bar{Q}$に一致することが確かめられている．[24]

ここで得られた，レプリカ空間におけるParisiのRSB行列要素Q_{ab}と実磁化空間における二つのP状態間の重なり$q_{\alpha\beta}$との対応づけを活用することで，P状態に関する興味深い性質が導かれる．P状態空間が'ultrametric'であり，そのことから無限分岐を伴う連続的な相転移描像が演繹されること，[25] 自由エネルギーの非示量部分(各P状態に共通な示量部分からのずれ)が指数関数則に従う独立なランダム変数とみなされること[26]などである．

以上のTAP理論とは全く別なパリシ解へのアプローチとして動的平均場理論に基づくものがある．[27] イジング・スピン系の動的臨界現象を論ずる一手段としての，ソフト化したスピン変数に対するランジュヴァン方程式の方法を用いる．[28] 秩序変数関数$q(x)$はSG相でのスピン相関を表わし，変数xにも時間尺度という単純な意味づけがなされており，興味深いのだがスペースの都合で詳細は割愛する．

2-v　m-ベクトルSGの平均場理論

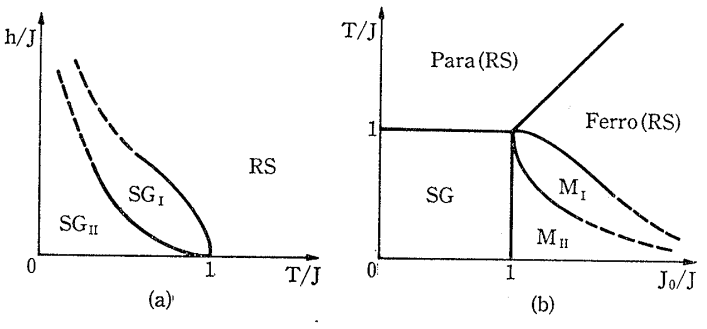
これまでイジングSGに限って話を進めてきたが，ここで一般のm-ベクトルSGの平均場理論を考える．レプリカ法の物理的意味が明確になったので，安心してこの方法を使えるわけだが，多自由度スピンのSGにおける転移の新たな側面がGabay-Toulouse[29]によって示された．SK模型のm-ベクトルSG版は，

$$H_J=-\sum_{\langle ij\rangle}\sum_{\mu=1}^{m} J_{ij}S_{i\mu}S_{j\mu}-h\sum_i S_{i1} \qquad (24)$$

と表わされる，但し，$\sum_\mu S_{i\mu}^2=m$．J_{ij}は(1)式中のそれと同じであり，また第1軸を磁場方向にとった．RS解に限り，空間の対称性を考慮すると，決定すべき秩序変数は次のq_1, $q_\perp$, xの3個になる：$\forall\alpha\beta,\forall\alpha$に対して

$$\left.\begin{aligned} &q_1\equiv\lim_{n\to0}\langle S_1^\alpha S_1^\beta\rangle\,,\quad q_\perp\equiv\lim_{n\to0}\langle S_\mu^\alpha S_\mu^\beta\rangle\ (\mu\neq1)\\ &1+(m\delta_{\mu,0}-1)\,x\equiv\lim_{n\to0}\langle(S_\mu^\alpha)^2\rangle\,. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

xはベクトルスピンの4重極分極を記述するものだが，SG転移に関しては副次的な役割しか果たさない．$h=0$の場合，q_1と$q_\perp$は同等であり，$T\leqq T_c=J$でスピンの各成分が凍結する．$h\neq0$の場合，全温度領域で$q_1>0$である．イジングSGでみられたRSB解への転移(AT線)が期待され



第5図　m-ベクトルSK模型のH-T相図(a)とT-J_0相図(b)．SG_IおよびM_I相では'弱い'RSBを伴ってスピンの横成分が凍結している($q_\perp\neq0$)．図(b)のM_I, M_{II}相では強磁性とRSBを伴うランダムなスピン凍結とが混在する．

NII-Electronic Library Service

るが，それよりも高温側で，磁場に対して横方向のスピン成分が凍結を起こす．計算の詳細は省くが，GT線と呼ばれるこの横方向成分凍結の臨界曲線は，hが小さいとき

$$1-T_{\mathrm{GT}}(h)/J=\frac{m^2+4m+2}{4(m+2)^2}\left(\frac{h}{J}\right)^2 \qquad (26)$$

で与えられる．RS解の不安定性まで含めた考察[30]から導かれるH–T相図は第5図(a)のようになる．GT線を越えると横成分$q_\perp$の凍結が生じると同時に，縦成分，横成分とも弱いRSBを起こし，さらにAT線に対応する臨界温度以下で，縦成分主導の強いRSBが起こる．この結果に対応して，T–J_0相図は第5図(b)となる．第2図(b)と比べるとSK解で見出されたリエントラント領域は，強磁性とRSBを伴うq_1と$q_\perp$の凍結とが混在する相であると結論される．

§3. 実験との比較

3–i SK模型と現実のSG

SK模型はSGの本質を抽出した最も理想化された模型であり，相互作用が有限レンジである現実のSG系*に，平均場理論の結果をそのまま適用するわけにはいかない．熱ゆらぎの高次効果を無視できない現実のSG系においても有限温度でSG秩序が存在し得るだろうか，即ち，最低臨界次元d_lはいくつか．平均場理論で得られたP状態描像は現実のSG系の観測結果とどのように対応するのだろうか．さらに磁場中のAT線やGT線，あるいはT–J_0相図はどうなるか．以下で実験結果との比較を含めて，これらの問題を検討する．

3–ii 相転移現象

平均場理論が予測する，SG相転移の最も特徴的な現象は非線形帯磁率χ_2のT_cにおける発散である．この熱力学量の発散は，規則的な長距離秩序は存在しないものの，T_cに向かって巨視的な相関が形成されることを意味する．[18]

$$\chi_{\mathrm{SG}}\equiv N^{-1}\sum_{ij}\langle S_iS_j\rangle_c^2\to\infty \qquad (27)$$

但し$\langle S_iS_j\rangle_c=\langle S_iS_j\rangle_T-\langle S_i\rangle_T\langle S_j\rangle_T$．鈴木[8]の議論を受け，都らは交流測定法を用いた実験でχ_2の発散を最初に観測した．[31] その後静磁場中での実験も行われ，スケーリング則[8]に沿った解析がなされている．$\chi_2\propto(T-T_c)^{-\gamma}$, $q\propto(T_c-T)^{\beta}$, $m(T=T_c)\propto h^{1+2/\delta}$としたときの臨界指数の値が第1表である．この表を作成したTholence[4]は$\gamma\simeq0$の系は超常磁性物質——互いに独立なスピンクラスターの集合体で，各クラスターはそれぞれの磁気異方性に起因する障壁エネルギーを熱活性化プロセスで反復反転する——であるとしている．これ以外のSG系の実験結果は，SG転移が通常の熱力学相転移であることを強く示唆している．

SG転移が熱平衡相転移であるか否かの問題に関して，最近接型3次元$\pm J$イジングSGに関する最近の計算機実験の結果は注目に値する．[32~35] 熱平衡であることを確認しながら行う，膨大な計

第1表　SGの臨界指数．パラメターRについては(28)式以下を参照．また3次元$\pm J$イジングSGはOgielski[45]のデータで，その空間相関の臨界指数は$\nu=1.3\pm1$．

Sample	R	β	γ	δ	T_c(K)
Mean field	0	1	1	2	
Fe particles	~1		0		26
$(Ti_9V_1)O_3$	.3		0(log)	0	3.6
PtMn 2%	.25		0(log)		2.75
AuFe 1.5%	.1	.9	1.2±.2	2±.2	11.8
AgMn 10.6%	.08		$1<\gamma<2$	2	37
CuMn .25%	.07	1	3.5	4.5	3.53
CuMn 4.6%	.07	1.1±.2	3.4±.4	4.2±.1	26.25
CuMn 1%	.07	.75±.2	3.25	5.7±.5	10.08
$AlGd_{37}$	.09	.6±.1	2.7±.1	5.7±.2	15.51
$Fe_1Ni_7P_2$	.1		2.3±.2	5.2±.7	22
$CsNiFeF_6$	.12	1.3	3±.5		5.35
Mn-alumino.	.15	1.4±.1	3.1±.1		T_{dc} 2.95
$3D\pm J$ Ising		.5	2.9±.3		1.2J

* 絶縁体SGのJ_{ij}は近接型であり，金属SGのRKKY相互作用はスピン間距離の3乗に逆比例しているが，ここでは両者の差異は論じない．また現実のスピン間相互作用は単に有限レンジであるばかりでなく，単純な等方的交換相互作用，(1)式，であるとは限らない．特に磁気異方性を誘起するような相互作用は，SG相における長時間緩和現象や低温での励起モードとも密接に絡まっている．さらに，現実のSG系における磁性原子，従ってJ_{ij}の分布が'理想的に'ランダムでないことも問題になり得る．これらの詳細については文献3を参照されたい．

NII-Electronic Library Service

算時間を費したモンテカルロ法によるもので，異なるグループがそれぞれ独立に $T_c \cong 1.2J$ を結論している.[34,35] その際得られた臨界指数を第1表に付記したが，γ の値は実験とよく対応している．それ以前まで J_{ij} が最近接型のイジング SG については $d_l > 3$ とする見方が有力であったが,[36] これが逆転されたわけで，現在では $2 < d_l < 3$ であると考えられている．これらの超大型計算機実験をもってしても，T_c 以下の SG 相の情報は限定される．単純な秩序相でないことを示す結果は出ているが,[34] 平均場理論での P 状態描像との関連や，磁場効果などは今後の課題である．

最近接型ハイゼンベルク SG については $d_l > 3$ とする報告が出されている.[37] これを認めるとすると，m-ベクトル SG に対して平均場理論が予測した磁場中でのスピンの横成分凍結現象 (GT 線) はどう解釈されるだろうか．次節に述べる長時間緩和現象と絡めて考える必要があると筆者は考えているが，実験的に GT 線の傾向 (T_c 近傍で上に凸) を示す臨界曲線は比熱の磁場依存性[38] や横成分微小磁場に対する非線形帯磁率 $\chi_2^{\perp}$ のピーク[39] 等で観測されている．$\chi_2^{\perp}$ のピークに関連して，(27) 式中の S_i を m-ベクトルスピンの横成分に置き換えて考えれば，$\chi_2^{\perp}$ が GT 線上で発散するとの指摘がある.[40] しかし，横磁場の印加は (24) 式において第1軸の取り直しを意味するだけで，そうして計算した磁化の表式には GT 線上で発散を示す項は存在しない ($h \to 0$ を除いて).[41] (27) 式で表わされる SG 相関がどのような実験で観測され得るかという点からみて重要な問題であると思われる．

第5図 (b) に示された T–J_0 相図もまた類似の詳しい考察が要求される．実際，混在相への転移は強い不可逆現象を伴っており,[42] この相図の問題も動的現象絡みである．さらに，SG–強磁性転移が見られるような，磁性原子の濃度が比較的大きな現実の SG 系では，隣接原子の配位の違いから生ずる効果は著しく，平均場理論では記述し切れないとする見方もある.* 'クラスター SG' の考え方[10] であり，リエントラント現象については，'強磁性ネットワークのランダム磁場的効果による切断' といった考え方[11] も提出されている．このように T–J_0 相図の問題は SG 現象の幾つかの側面を合わせもつ，重要な課題であるが，詳しい解説が最近書かれているので[10,11] ここではこれ以上立ち入らない．

3-iii　長時間緩和現象

§1 の冒頭に述べたように，SG には多数の準安定状態が存在する．それらが適当に定義されたスピンクラスターの反転の自由度に対応すると考えれば，障壁エネルギー E_b はそれぞれのクラスターにより異なり，従って，SG には多様な緩和過程が存在し，緩和時間 τ の分布が予想される．しかも重要なのは，前小節で触れた超常磁性体のように E_b の分布がかなりの高温から決まっているのではなく，SG では E_b の分布自体が温度に敏感なこと[44] である．これは (27) 式で表わされるような SG 相関が温度の降下とともに発達する，即ち，上述のクラスター自体が，まわりのスピンやクラスターを取り込みながら大きくなっていくものと考えられる．この状況を反映して，適当な平均操作で決められる系の特性緩和時間 τ_c は固有の温度依存性を示す．平均場理論は，高温側パラ相においては簡単な動的臨界現象，$\tau_c \propto (T - T_c)^{-1}$ を与える.[28]

平均場理論の最も重要な結果は T_c 以下で多数の P 状態が出現すること，即ち SG 相の非エルゴード性である．具体的には，例えば 2-iv 節に述べた χ_0 と χ_{EA} の違いがあるが，実験的にも，T_c より高温側から磁場 h をかけたまま冷却したときに観測される磁化 m_{FC} が $\chi_0 h$ に，また零磁場中で冷却し低温になってから h をかけたとき観測される磁化 m_{ZFC} (あるいは交流測定での m) が $\chi_{EA} h$ に対応する (第4図)．後者の観測では全体の P 状態の再構築を伴う応答は見られないというわけである．この差異の生じ始める温度の h 依存性や，磁気残留効果，交流帯磁率の散逸部分の急速な増大，あるいはトルク測定などの実験結果は AT 線，(13) 式，を定性的に再現する.[3] 定量的には観測される磁場効果は平均場理論の予測より数倍以上大きいとか，転移温度がそれを測定する時間尺度

* この点に関して，SK 模型はレプリカ空間の問題に焼き直せば均一系になるが，個々のサンプルでは各スピンに働く有効磁場に分布があるように,[43] 各スピンの振舞は不均質であり，J_{ij} の配位の違いによる不均質効果も存在していることを指摘しておく．

NII-Electronic Library Service

に依存するため真の熱平衡相転移であるかどうかなどの問題は残されているが，磁場中のAT転移(恐らくGT転移も)を含めて平均場理論が与えたRS↔RSB転移は，現実のSG系における，著しい不可逆性が出現する転移様現象とよく対応していると言えよう．SG問題の鍵は，その動的側面，特に長時間緩和現象にあると筆者は考えている．

さて，高温側パラ相に戻って，前述の特性緩和時間 τ_c の T 依存性を検討する．実験的には交流帯磁率のカスプ温度 $T_f(\nu)$ の測定周波数依存性から $\tau_c(T)$ を見積ることができる．即ち，ν^{-1} が τ_c より小さければ，この交流外場にはスピン系は応答できず，これがカスプが出現する原因であるとして，温度 $T_f(\nu)$ での τ_c が ν^{-1} に等しいと見なす．実は，この $T_f(\nu)$ の問題はSG研究の当初から相転移か否かを巡る論争の中心にあったもので，つい最近まではガラス転移に関する経験則(ヴォーゲル・ファルチャー(Vogel-Fulcher)則)

$$\frac{1}{\nu}\simeq\tau_c(T)=\tau_0\exp\left\{\frac{E_b T_f(\nu)}{T_f(\nu)-T_0}\right\} \qquad (28)$$

を用いてSGのダイナミックスが整理されていた.[4] 特にパラメター $R\equiv(T_f-T_0)/T_f|_{\nu=10\,\mathrm{Hz}}$ を導入すれば，超常磁性体では $\tau_c(T)$ はアレニウス(Arrhenius)則に従うから $(T_0=0)$ $R=1$ であり，協力現象で $\tau_c\to\infty$ が有限温度 $(T_0>0)$ で実現しているとすれば，$T_f(10\,\mathrm{Hz})\simeq T_0$ と考えて $R\simeq 0$ が期待される．実際第1表で R が小さいSG系ほど非線形帯磁率のスケーリング則へのフィットも良いことが解る．3次元 $\pm J$ イジングSGに関する最新の計算機実験により，SG転移は相転移様ガラス転移というより，むしろ真の熱平衡相転移であると考えられるようになったと前小節で述べたが，$\tau_c(T)$ についても計算機実験は $\tau_c(T)\propto(T-T_c)^{-z\nu}$, $z\nu=7.9\pm1.0$ を与え,[35,45] また実験データもその結果を踏まえて整理し直すと，(28)式よりもベキ乗則へのフィットの方が良いとの報告がなされている(SGにより $z\nu\cong4\sim10$).[46]

このようにパラ相の平均化された量 $\tau_c(T)$ をみている限り，SG転移も通常の動的臨界現象となり，先に記した τ の分布等は問題にならないようだが，時間(あるいは周波数)依存性を陽に考えると事情は複雑である．実験事実はパラ相においても τ が分布していることを明らかに示しているし,[47] 計算機実験でシミュレートされる相関関数 $q(t)\equiv N^{-1}\sum_i\langle S_i(0)S_i(t)\rangle$ も単純なデバイ緩和則ではなしに，コールラウシュ(Kohlrausch)則(引き伸ばされた指数関数則)によく従っている.[45] このような事実や，SGでは臨界温度領域が極めて広い(T_c 自体と同程度かそれ以上)ことなどは τ の分布，即ち，クラスターの相関効果によるものではないかと筆者は考えている．時間 t が陽に入った問題はむしろ T_c 以下のSG相においてより興味深い．既に述べたAT線の測定時間尺度依存性，残留磁化の緩和過程($\ln t$ 則,[48] $t^{-\alpha}$ 則[49]あるいはコールラウシュ則[50]など)，あるいは磁気的 $1/f$ ノイズ[48]等々の観測結果がある．後者2例のような長時間緩和現象は，τ の分布が存在するような複雑な系が示す現象として古くから知られている．最近，この種の現象に潜む物理的な機構に立ち入ろうとする研究が目立つようになってきた.[51] この側面から捕えてもSG現象は大変重要かつ興味深い研究対象であり，今後の発展が期待される．

§4. おわりに

平均場理論を中心にしたSGの最近の理論を，筆者の私見も混じえながら解説した．筆者の不勉強もあって，それぞれのSGの個性にまで立ち入らなかったが，3-i節の脚註に触れた諸現象について理論実験両面からの研究が進んでいる.[3] 他方，3-iii節で述べたように，SGは多数の準安定状態が存在するような複雑な系のプロトタイプとしても注目されている．実際，SGに対する諸概念が種々の系，例えば脳の神経網モデル[52]にまでも適用され始めている．SGは'硬い物理'と'軟かい物理'との接点に位置する研究課題であると言えよう．最後に，本稿をまとめるのに，北海道大学大学院生根本幸児氏との議論が大変有益であったことを記して筆をおく．

文　献

1) S.F. Edwards and P.W. Anderson: J. Phys. F **5** (1975) 965.
2) G. Parisi: J. Phys. A **13** (1980) 1101, 1887 and L115.
3) 最近のSG研究の包括的なレビューとして，K.H. Fischer: Phys. Status Solidi b **116** (1983) 357 お

NII-Electronic Library Service

よび掲載予定，がある．
4) J.L. Tholence: Physica **126B** (1984) 157.
5) D. Sherrington and S. Kirkpatrick: Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1792; Phys. Rev. B **17** (1978) 4384.
6) 例えば, Stanley: *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford Univ. Press, 1971) 6.5 節.
7) C. De Dominicis and A.P. Young: J. Phys. A **16** (1983) 2063.
8) M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **58** (1977) 1151.
9) K. Wada and H. Takayama: Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 327.
10) 石川義和: 固体物理 **20** (1985) 229.
11) 元屋清一郎, S. M. Shapiro: 日本物理学会誌 **40** (1985) 420.
12) J.R.L. de Almeida and D.J. Thouless: J. Phys. A **11** (1978) 983.
13) B. Duplantier: J. Phys. A **14** (1981) 283.
14) D.J. Thouless, *et al.*: J. Phys. C **13** (1980) 3271. C. De Dominicis and I. Kondor: Phys. Rev. B **27** (1983) 606.
15) D.J. Thouless, *et al.*: Phil. Mag. **35** (1977) 593.
16) T. Plefka: J. Phys. A **15** (1982) 1971.
17) H. Sompolinsky: Phys. Rev. B **23** (1981) 1371.
18) A. J. Bray and M. A. Moore: J. Phys. C **12** (1979) L441.
19) A. J. Bray and M. A. Moore: J. Phys. C **13** (1980) L469.
20) N.D. Mackenzie and A.P. Young: J. Phys. C **16** (1983) 5321.
21) K. Nemoto and H. Takayama: J. Phys. C **18** (1985) L529.
22) G. Parisi: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1946.
23) A.P. Young: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1206.
24) K. Nemoto and H. Takayama: J. Magn. & Magn. Mater. に掲載予定.
25) M. Mézard, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1156; J. Phys. (France) **45** (1984) 843.
26) M. Mézard, *et al.*: J. Phys. Lett. (France) **46** (1985) L217. B. Derrida and G. Toulouse: *ibid.* L223.
27) H. Sompolinsky: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 935.
28) C. De Dominicis: Phys. Rev. B **18** (1978) 4913. H. Sompolinsky and A. Zippelius: Phys. Rev. B **25** (1982) 6860.
29) M. Gabay and G. Toulouse: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 201.
30) D.M. Cragg, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 158. M. Gabay, *et al.*: J. Phys. C **15** (1982) 7165.
31) 都　福仁, 他: 日本物理学会誌 **35** (1980) 596.
32) W.L. McMillan: Phys. Rev. B **31** (1985) 340.
33) A.J. Bray and M.A. Moore: Phys. Rev. B **31** (1985) 631.
34) R.N. Bhatt and A.P. Young: Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 924.
35) A.T. Ogielski and I. Morgenstern: Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 928.
36) I. Morgenstern and K. Binder: Phys. Rev. B **22** (1980) 288; Z. Phys. B **39** (1980) 227.
37) A.P. Young: 磁気国際会議 (ICM '85) での発表.
38) W.E. Fogle, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1815.
39) T. Taniguchi, *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 220.
40) M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **73** (1985) 830. M. Katori and M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 1175.
41) K. Nemoto and H. Takayama: Prog. Theor. Phys. に掲載予定.
42) L.A. Campbell, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1615.
43) F. T. Bantilan, Jr. and R. G. Palmer: J. Phys. F **11** (1981) 261.
44) K. Nemoto and H. Takayama: J. Phys. C **16** (1983) 6835.
45) A.T. Ogielski: preprint.
46) J. Souletie and J.L. Tholence: Phys. Rev. B **32** (1985) 516.
47) F. Mezei: J. Magn. & Magn. Mater. **31–34** (1983) 1327. T. Saito, *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 231.
48) M. Ocio, *et al.*: preprint.
49) K. Katsumata, *et al.*: Solid State Commun. **43** (1982) 711. 伊藤厚子, 他: 日本物理学会 1985 年秋の分科会, 千葉, での発表.
50) R. V. Chamberlin, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 867. R. Hoogerbeets, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 111.
51) K.L. Ngai: Comments Solid State Phys. **9** (1979) 127 and 141. R.G. Palmer, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 958.
52) J. J. Hopfield: Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **79** (1982) 2554. L. Personnaz, *et al.*: J. Phys. Lett. (France) **46** (1985) L359. W. Kinzel: Z. Phys. B **60** (1985) 205.

NII-Electronic Library Service