

# 量子もつれの基礎および量子情報や物理との関係

井元 信之 (大阪大学大学院基礎工学研究科 imoto@mp.es.osaka-u.ac.jp)

量子もつれの基本的概念を2体の2準位系から多体の多準位系を例にとり解説する。量子もつれと切り離せない量子テレポーテーション、量子もつれの強度、生成法、弱い量子もつれから強いもつれへの濃縮法、情報や物性等各方面との関係について述べる。

## 1. はじめに

複数の系にまたがる量子状態が個々の系の状態に分離できないさまをシュレーディンガーはドイツ語で Verschränkung と呼び、同時にそれを entanglement と英訳した。<sup>1)</sup> この英語は糸や人間関係が複雑に絡まっている様子を表し、純粋な状態からはほど遠い乱雑さを表す。対してドイツ語の方は連座あるいは腕組みの意であり、乱雑な様相を表さない。entanglement が最大となるのは乱雑でない純粋状態であること(後述)を考えると、Verschränkung の方がよい。訳はさしずめ連結状態や量子相関となろうが、これは語感が地味である。一般には量子もつれと呼ばれたり、エネルギーやエントロピーのようにそのままエンタングルメントと書かれるが、本稿では語感が面白く字数が少ない利点を持つ「量子もつれ」で話を進める。

量子もつれは元々量子論の基本に関する議論に端を発し、近年では量子情報処理に不可欠の概念として研究が進展し、最近では物性物理でもその概念が使われるようになってきた。量子もつれはベル不等式を破るための必要条件になっている点で量子論の基本との関わりが深いが、ベル不等式についての解説はこの号の筒井氏の記事や文献2)に委ねるとして、この記事では量子もつれの概念・量子情報処理との関わり・物理での新たな使われ方について概観する。

## 2. 量子もつれとは

量子力学的な粒子(波としても振る舞う粒子)が2つあるとし、それぞれA, Bと名付ける。2つが独立に波数  $\mathbf{k}_A$ ,  $\mathbf{k}_B$  の平面波を成しているとする、全体の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = e^{i\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}_A} e^{i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{r}_B} \quad (1)$$

のように単なる積で表される。時間依存部  $e^{-i\omega_A t}$ ,  $e^{-i\omega_B t}$  や規格化定数は省いた。一般に2粒子の波動関数は6次元の配位空間を伝わるが、この波動関数は3次元実空間を伝わる2つの波動関数に分離されている。これは「もつれていない」状態である。

次に、波数が  $\mathbf{k}_A + \mathbf{k}_B = \text{const.} \equiv \mathbf{k}_0$  の関係にある波動関数がいくつか重ね合わさった状態にあるとしよう。パラメトリック下方変換( $\mathbf{k}_0$ はポンプ光の波数)や粒子-反粒子対発生( $\mathbf{k}_0=0$ )で作られる状態である。それは(1)式を重ね合わせて

$$\psi(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_A} e^{i[(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_B]} \quad (2)$$

と表される。 $\mathbf{k}$ が連続ならば和は積分になる。この波動関数は3次元空間を伝わる2つの波動関数の積の形に分離できず、6次元の配位空間を伝わる形でしか書けない。(2)式において粒子Aの波数を観測して $\mathbf{K}$ という値を得たとすれば、 $\mathbf{k}$ の和または積分がとれて $\mathbf{K}$ 単独になるので、Bの波数は自動的に $\mathbf{k}_0 - \mathbf{K}$ に決まる。このことから状態が分離していないことがわかる。波数は運動量なので、2つの粒子の運動量が強く関連していることになる。それだけでなく、位置も強く関連している。実際(2)式で $\mathbf{k}$ を連続量として積分を実行すると

$$\psi(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_B} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)} = \delta(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \quad (3)$$

となる。最後の等号で定数  $(2\pi)^3$  や位相因子  $e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_B}$  は省いた。<sup>3)</sup> これは粒子Aの位置を観測したら粒子Bも対応する位置にいることを意味する。すなわち粒子Aの検出を伝令としてそのときのBの位置が知れるので、これはいわゆる「伝令付き」単一光子の発生に用いられている。位置と運動量のように不確定関係にある物理量それぞれについて複数粒子間で強い相関を示すのも量子もつれの特徴である。有名なEPR(Einstein-Podolsky-Rosen)の論文<sup>4)</sup>でアインシュタインは(2)式の状態を例に挙げ、Aの位置を知りたいければ直接測りAの運動量は間接的にBのそれを測ることにすればどちらも実在であろうと指摘した。これがシュレーディンガーの論文<sup>1)</sup>を触発した。

## 3. n体のm準位系

量子もつれが現れる最も簡単な系は2個の2準位系である。2つの準位をケット記号で $|0\rangle, |1\rangle$ と名付けると、粒子AとBが $|0\rangle_A |0\rangle_B$ とか $|1\rangle_A |1\rangle_B$ のように積で表されるときは(1)式と同様もつれていない状態である。しかし

$$|\psi\rangle = \sqrt{p} |0\rangle_A |0\rangle_B + \sqrt{1-p} |1\rangle_A |1\rangle_B \quad (4)$$

のような場合は(2)式と同じく「もつれて」いる。 $p=0$ や $p=1$ のときは単なる積状態なので、量子もつれに強さというものがあるとすれば、 $p=1-p=1/2$ のとき最大になると予想される。その予想は正しいので先取りすると、

$$\begin{aligned}
|\phi^+\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \\
|\phi^-\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} - \text{⊗} \text{⊗} \\
|\psi^+\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \\
|\psi^-\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} - \text{⊗} \text{⊗}
\end{aligned}$$

図1 2体の2準位系の量子もつれ。単位と位相 $0\cdot\pi$ の組み合わせで4つのベル状態がある。

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

となるが、これを $|\phi^+\rangle$ と書いて、ベル状態と呼ぶ。添え字ABを書かないのは誤解がないため省略したもので、00（または11）の左の0（または1）が粒子Aで右が粒子Bと約束する簡略記法である。さらに規格化定数の $1/\sqrt{2}$ すら省略することがある。最大もつれ状態は無数にあるが、(5)式と直交基底をなすものは他に3つあり、それぞれ $|\phi^-\rangle \equiv |00\rangle - |11\rangle$ ,  $|\psi^+\rangle \equiv |01\rangle + |10\rangle$ ,  $|\psi^-\rangle \equiv |01\rangle - |10\rangle$ と定義され（規格化定数は省いた）、これらもベル状態という。2粒子のヒルベルト空間は4次元だが、その基底の最も単純な選び方は $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ のようにもつれていないものだけから成る基底であろう。逆に $|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle$ はどれも最大もつれ状態であるベル状態ばかりから成る基底である。単純基底とベル基底の基底変換は量子テレポーテーションのところで重要となる。図1に4つのベル状態を2準位系のイラストで描いた。

なお量子情報の分野では2準位系のことをqubit（量子ビット）と呼ぶ。2準位といっても、エネルギー的には等しい2状態であることが多い。無磁場中のスピンのx方向のupとdown（またはy方向またはz方向のupとdown）、1つの光子の縦横偏光（または $\pm 45$ 度偏光または右回りと左回りの円偏光）などである。なお $|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle$ のうち最初の3つは粒子の入れ替えに対して変化しないが、最後の $|\psi^-\rangle$ は符号が反転する。 $|\psi^-\rangle$ はシングレット状態、最初の3つはトリプレット状態と呼ばれる。これらのベル状態にある2つの量子ビットのことをベルペアと呼ぶ。

次なる複雑化は(a)多体の2準位系すなわち多qubit系へ進むか、(b)2体の多準位系か、(c) $n$ 体の $m$ 準位系へ進む方向がある。まず(a)の方向であるが、3体の2準位系ではGHZ状態<sup>5)</sup>と呼ばれる

$$|\text{GHZ}\rangle \equiv \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

という量子もつれ状態と、W状態と呼ばれる

$$|W\rangle \equiv \frac{|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

という量子もつれ状態がある。

図2にGHZ状態とW状態を描いた。3体の場合これ以外の量子もつれはないことがわかっている。「ない」の意

$$\begin{aligned}
|\text{GHZ}\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \\
|W\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗}
\end{aligned}$$

図2 3体の2準位系の量子もつれ。

$$\begin{aligned}
|\text{GHZ}_4\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \\
|W_4\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \\
|C_4\rangle &\equiv \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} - \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗}
\end{aligned}$$

図3 4体の2準位系の量子もつれの例。上からGHZ状態、W状態、クラスター状態。

$$\text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} + \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗} \text{⊗}$$

図4 2体の4準位系の量子もつれの例。

味は後述のLOCCという概念のところで説明する。

4体の2準位系でもGHZ状態

$$|\text{GHZ}_4\rangle \equiv \frac{|0000\rangle + |1111\rangle}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

と、W状態

$$|W_4\rangle \equiv \frac{|1000\rangle + |0100\rangle + |0010\rangle + |0001\rangle}{\sqrt{4}} \quad (9)$$

という量子もつれ状態がある。これ以外にもクラスター状態と呼ばれる

$$|C_4\rangle \equiv \frac{|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle}{\sqrt{4}} \quad (10)$$

などがある。この状態は一方向量子計算に使われる。最後の項がマイナスであることは重要である。もしプラスならその状態は $(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})(|00\rangle_{CD} + |11\rangle_{CD})/2$ と因数分解され、これはAとBはもつれており、CとDももつれているがAB系とCD系に二分すると積状態になっていることを意味する。しかし(10)式は1カ所マイナスなのでどのように仕切りを入れてももつれていない。図3に $|\text{GHZ}_4\rangle, |W_4\rangle, |C_4\rangle$ を描いた。4体の場合、これ以外の量子もつれもあると確信されるが、万人が満足の行く量子もつれの分類法は今のところない。

次に(b)の2体の多準位系の方向であるが、たとえば2体の4準位系を例にとると、4準位すべてを等振幅等位相で足し合わせると

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle}{\sqrt{4}} \quad (11)$$

という状態になる。図4にそれを描いた。このように等振幅で足し合わせた状態は最大もつれ状態(MES: Maximally Entangled State)と呼ばれる。

準位が4つでなく多数あるいは連続的なれば(11)式は

$$\sum_n |n\rangle_A |n\rangle_B \quad \text{あるいは} \quad \int dx |x\rangle_A |x\rangle_B \quad (12)$$

のように表される。ただし規格化定数は省いた。物理的に

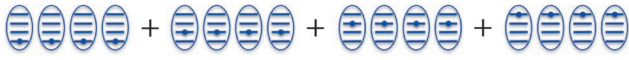


図5 4体の4準位系の量子もつれの例.

発生できる状態としては規格化できなければならないので、和や積分の範囲を有限にするか分布を一様でなくしたものになる。xは連続的に分布する準位のサフィックスであるが、準位に限らず何らかの「モード」でよい。たとえば(2)式の量子もつれ状態をブラケット記号で(ついでに波数kでなく角振動数 $\omega$ )で書くと、

$$\int d\omega |\omega\rangle_A |\omega_0 - \omega\rangle_B \quad (13)$$

のように書かれるが、これは非線形光学結晶に角周波数 $\omega_0$ の強いレーザー光(ポンプ光と呼ばれる)を照射したときに生成される「もつれた光子対」の状態で、光の量子情報処理実験では日常的に使われる。実際に使われる状態は(13)式の積分変数 $\omega$ の範囲は一先に書いたように一無限ではなく、位相整合条件と呼ばれる条件を満たす中心角周波数の回りに分布する重みを付けた積分となるが、中心角周波数の近くしか興味がない場合は概念的に(13)式のように書かれる。<sup>6)</sup>

最後は(c)の多体の多準位系の方向である。4体の4準位系を例にとると、たとえば4体すべての準位が揃った状態を等振幅等位相で足し合わせた状態は

$$\frac{|0000\rangle + |1111\rangle + |2222\rangle + |3333\rangle}{\sqrt{4}} \quad (14)$$

という状態になる。図5にそれを図示した。

さて、量子もつれを有する複数の系の1つだけに着目したときの状態を考えよう。まず全系の密度演算子を $\hat{\rho}$ とすると、そのトレースは1になる。密度演算子を対角化する基底で密度行列にするとそれぞれの基底にある確率が対角成分に並ぶので、これは「個々の基底にある確率を足すと1」を意味する。つまり全系がどの基底にあるかを見ないのであれば、何らかの基底にある確率は1であり、これが $\text{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ に対応している。複数の系にまたがる場合も、系Bの中身を見ないことは系Bだけトレースをとることに対応する。そうすれば、系Bが何らかの基底にあってもそれは見ずに捨てたときの系Aの密度演算子が残る。すなわち $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}] = \sum_{nB} \langle n|\hat{\rho}|n\rangle_B$ である。この $\text{Tr}_B$ のことを( $\text{Tr}_A$ もそうであるが)部分トレースという。簡単のため2つの量子ビット系で(4)式の $|\psi\rangle$ を例にとると、 $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ としてただちに

$$\hat{\rho}_A = p|0\rangle\langle 0| + (1-p)|1\rangle\langle 1| \quad (15)$$

を得る。 $p=0$ または $p=1$ ならばこれは系Aが $|1\rangle$ か $|0\rangle$ に決まっている純粋状態であり、 $p=1/2$ のときどちらか全くわからない最大混合状態であり、それ以外の $p$ は「どちらか多少はわかる」混合状態を表す。(純粋状態か混合状態かの判定は、 $\hat{\rho}$ が純粋状態であるための必要十分条件 $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ を確

認すればよい。)

したがって「量子もつれが最大の状態とは、部分トレースをとったとき最大混合状態を示す状態」と言える。もちろん系Aと系Bに分割するときヒルベルト空間のサイズに注意しなければならないし、多体の多準位系ではどんな分割の仕方でもコンシステントにこれが言えるとは限らない、という注意を払う必要はあるが。

この考え方を進めると、部分系Aの密度演算子のフォン・ノイマンエントロピー $S_A \equiv -\text{Tr}_B[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]$ —これは(15)式の場合は $-\left[p \log p + (1-p) \log (1-p)\right]$ であるが—これをもって量子もつれの強さと言うことができそうである。確かにこの定義は積状態 $p=0$ または1のときに0となり、 $p=1/2$ のときに最大となる。2準位系に限らず、全系が純粋状態のときこの定義は有効である。全系が純粋状態のとき一般に $S_A = S_B \equiv -\text{Tr}_A[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]$ に等しいので、AとBのどちらのトレースをとるかに依らない。この量はエンタングルメント・エントロピーと呼ばれることがある。<sup>7)</sup>

全系がもともと混合状態のときは注意を要する。このとき全系のフォン・ノイマンエントロピー $S$ は元来正なので、部分系のフォン・ノイマンエントロピーが正であることが観測されたとしても、それが量子もつれによるものなのか元々の不確かさによるものかすぐにはわからないからである。

#### 4. LOCC

先に複数の系の状態が個々の積状態に分離されるならばそれは量子もつれ状態ではないと書いた。これは純粋状態の積か混合状態の積かに依らず正しい。では積状態に書けない状態はただちに量子もつれ状態かという、そうとは限らない。たとえば

$$\hat{\rho} \equiv p|00\rangle\langle 00| + (1-p)|11\rangle\langle 11| \quad (16)$$

という密度演算子で書かれる混合状態を考える。これは純粋状態の積でないことはもちろん、混合状態の積でもない。系AとBを1つのブラあるいはケットに入れてしまう略記を使わずきちんと書けば、これは

$$p|0\rangle_A \langle 0| \otimes |0\rangle_B \langle 0| + (1-p)|1\rangle_A \langle 1| \otimes |1\rangle_B \langle 1| \quad (17)$$

と書かれるが、これは粒子AとBの密度演算子の積の和である。ではこれを量子もつれと呼ぶかという、呼ばない。なぜならば、確かに粒子AとBの間には準位の相関はあるが、 $|00\rangle$ と $|11\rangle$ の間の位相関係は全く不定である。準位と位相のように不確定関係にある量の両方が相関を示すわけではないので、それは量子もつれではない。(17)式が(4)式と異なっていることは、(4)式の密度演算子 $|\psi\rangle\langle\psi|$ を書いてみれば

$$p|0\rangle_A \langle 0| \otimes |0\rangle_B \langle 0| + (1-p)|1\rangle_A \langle 1| \otimes |1\rangle_B \langle 1| + \sqrt{p(1-p)}(|0\rangle_A \langle 1| \otimes |0\rangle_B \langle 1| + |1\rangle_A \langle 0| \otimes |1\rangle_B \langle 0|) \quad (18)$$



となり、あくまで混合状態である(17)式とは別ものであることからわかる。

以上の考察から、2体の量子もつれとして次のような定義が考えられる。系Aの密度演算子 $\hat{\rho}_n^{(A)}$ と系Bの密度演算子 $\hat{\sigma}_n^{(B)}$ を用いて、(16)式を一般化した

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n \hat{\rho}_n^{(A)} \otimes \hat{\sigma}_n^{(B)} \quad (19)$$

のように全系の密度演算子 $\hat{\rho}$ が書ける場合は「もつれていない」と言い、こう書けない場合に「もつれている」と定義する。ここで $p_n$ は非負で $\sum_n p_n = 1$ の確率分布をなす。もし特定の $n$ に対して $p_n = 1$ でそれ以外の $p_n$ が0ならば(19)式は積状態となるので、この定義は単なる積状態も含んでいる。以上は2体系に限らず多体の場合も同様である。

量子もつれを物理的に作るにはどのような条件が必要だろうか？先に述べたようにある種の非線形光学結晶に強いポンプ光レーザーを照射すれば(13)式あるいは(2)式で表される量子もつれ光子対を作ることができる。一般に、もつれていなかった2つの系をもつれさせるには物理的相互作用が必要である。初めから離れていたもつれない系を没交渉のままもつれさせることはできない。この場合、電話やメールで連絡をとることが許されるならば古典相関を形成することはできる。

2つの光子を電話連絡だけでもつれさせることはできなさそうである。(16)式あるいは(17)式あるいはそれを一般化した(19)式のような古典相関しか持たない状態ならば、いうまでもなく電話連絡だけで相関を作ることができるが。

この「離れた二人が電話連絡だけで行い得る操作」を考えてみる。系AとBが離れている場合、系Aのところにいる人(慣例によりアリスと呼ぶ)はもちろん系Aに物理的操作をすることができ、系Bのところにいる人(ボブと呼ぶ)は系Bに物理的操作ができる。物理的操作とはユニタリ変換のような可逆なもの、観測や散逸・デコヒーレンスといった不可逆なものも含む。しかしアリスは系Bを直接操作はできないしボブは系Aを直接操作することはできない。もちろんアリスもボブも系Aと系Bを相互作用させることはできない。しかしアリスとボブは電話やメールで連絡を取り合い、自分がした操作や測定の結果を互いに伝え合うことはできるとする。アリスはボブへの連絡を通じてボブが系Bに施す操作の選択に影響を与えることはできる。同様にアリスもボブからの連絡に応じて系Aに施す操作を変えることができる。アリスとボブが離れた地点にいる場合、せいぜいこのような通信とローカルな操作を有限回行うことが、最大限できることである。これを、local operation and classical communicationの頭文字をとってLOCCと呼ぶ。なぜclassical communicationと言うかというと、電話やメールなど通常の通信は量子通信ではなく古典通信だからである。

系AとBがもともと量子もつれ状態にないとき、この

ようなLOCCだけで量子もつれ状態に変えることはできない。逆に言えば、量子もつれとはLOCCで創出できないものという特徴付けをしてもよい。

以上は2体系に限らず多体の場合も同様である。ここで(7)式直後に「3つの量子ビットがもつれた状態はGHZ状態とW状態以外にない」と書いたことを思いだそう。これは「GHZ状態とW状態は3体間のLOCCでは移りあえない。しかしこれ以外にLOCCで移りあえない3体の量子もつれ状態はない」という意味である。正確に言うと確率1でなくてもよいLOCC(確率的LOCC、SLOCCと呼ばれる)で移りあえるか、あるいはそれでも移りあえないかという意味である。SLOCCの観点から3体の2準位系(3つの量子ビット)についての分類はクリアであり、<sup>8)</sup>3体の2準位以上の系については、いくつかの場合について<sup>9)</sup>クリアになっている。しかしより高準位な系や4体以上の系になるとSLOCCによる方法では「係数が少しでも違うと移りあえないので別のもつれ」という、ややつまらないことになってしまう。GHZやW以外にクラスター状態その他の有用な量子もつれ状態があり、それらの性質などはよくわかっているが、全く一般の状態についてSLOCCに根ざした方法でつまらない分類はまだ発展途上である。

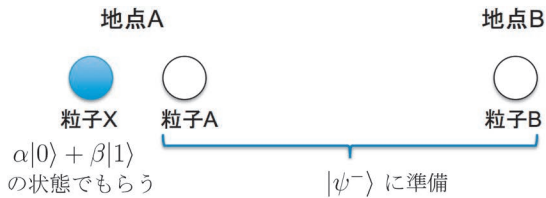
## 5. 量子テレポーテーション

量子テレポーテーションは量子情報処理実現のために必要であるという実用上の意義があるだけでなく、量子情報処理の根本にかかわる極めて重要な概念である。

いま、地点Aにある系Xの量子状態を地点Bに配送するというタスクを考える。簡単のため系とは量子ビットすなわち $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の2状態のみとする系とする。具体的には1つの光子が水平偏光の状態を $|0\rangle$ で表し、垂直偏光を $|1\rangle$ で表すと、45度偏光は $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 、-45度偏光は $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ 、左回り円偏光は $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ 、右回り円偏光は $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ となる。スピンの方が慣れている場合はxスピン、yスピン、zスピンそれぞれupとdownの状態が対応する。このような光子あるいはスピンを地点AからBへ直接運べば、もちろん配送タスクは遂行される。しかし光子やスピンを散逸やデコヒーレンスから守って運ぶことは至難である。そこで量子テレポーテーションが登場する。物理系そのものを送るのでなく、地点Bに受け皿となる物理系があって、その状態を系Xの量子状態にするという手法である。

例として系Xの量子状態が $\alpha|0\rangle_X + \beta|1\rangle_X$ という重ね合わせ状態であるとしよう。ただし $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ である。 $\alpha$ や $\beta$ を知っているなら、地点Aから地点Bに電話をかけて「そちらで $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ の光子なりスピンなりを作れ」と言えば済む話なので、系Xの量子状態を知らないとする。

いま量子ビットXの他に、ベル状態の1つである $|\psi^-\rangle_{AB} \equiv (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B)/\sqrt{2}$ であるような量子ビットAと量子ビットBをそれぞれ地点Aと地点Bに持っていたと



→ 粒子XとAの系をベル測定してベル状態  $|\psi^-\rangle$  を得た場合、粒子Bは自動的に元のXの状態になっている。他の3つのベル状態のどれかだった場合も、粒子Bを物理的に容易に  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  に変換できる。

図6 量子テレポーテーション。

しよう。すると系Xと系ABは独立なので単なる積となり、全系の状態は

$$|\Psi\rangle = (\alpha|0\rangle_X + \beta|1\rangle_X) \frac{|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_X|0\rangle_A|1\rangle_B - \alpha|0\rangle_X|1\rangle_A|0\rangle_B + \beta|1\rangle_X|0\rangle_A|1\rangle_B - \beta|1\rangle_X|1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (21)$$

ここで量子ビットXとAの基底としてベル基底  $|\psi^-\rangle_{XA}$ ,  $|\psi^+\rangle_{XA}$ ,  $|\phi^-\rangle_{XA}$ ,  $|\phi^+\rangle_{XA}$  を用いると、その結果は

$$|\Psi\rangle = -\frac{1}{2} [ |\psi^-\rangle_{XA}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + |\psi^+\rangle_{XA}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) - |\phi^-\rangle_{XA}(\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) - |\phi^+\rangle_{XA}(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) ] \quad (22)$$

となることが簡単に示される。これは量子ビットXAが (1)  $|\psi^-\rangle$  と観測されたなら量子ビットBは  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  で、 (2)  $|\psi^+\rangle$  と観測されたなら量子ビットBは  $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$  で、 (3)  $|\phi^-\rangle$  と観測されたなら量子ビットBは  $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$  で、 (4)  $|\phi^+\rangle$  と観測されたなら量子ビットBは  $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$  であることを意味する。このようにベル基底に射影する測定をベル測定というが、結果が(1)なら何もしくなくても量子ビットBは元のXの状態になっており、(2)なら位相反転をすればよく、(3)ならビット反転をすればよく、(4)ならその両方を反転すればよい。かくしてどの結果が出ても無駄なく元のXの状態が量子ビットBに出現するのである。これが量子テレポーテーションである。

言い換えると、量子ビットXをもらう以前に(あるいはXを保存しておけるなら以後でもよいが)ベル状態にある量子ビットAとBをそれぞれ地点AとBに配っておけば、後はXとAのベル測定を地点Aで行い、測定結果を地点Bに電話(古典通信)すればよい。量子ビットXを物理的に地点Bに運ばなくてもその量子状態が地点Bに出現することからテレポーテーションと呼ばれる。この方法は地点AからBへ測定結果を伝えるというステップを含んでいるので、そこが光速を超えることができないため、量子テレポーテーション全体としては光速を超えて「量子状態転送」することはできない。

先に「このタスクを行う我々はXの状態を知らないと仮定する」と書いたが、知っていても電話連絡だけでは済まず量子テレポーテーションを使わなければならない場合がある。それはXがどこかにある系Yと量子もつれ状態になっている場合である。たとえば(4)式のような量子もつれ状態にある2つの量子ビットの片割れは、それだけ見ると(15)式のような混合状態になっているが、それを知っていたとして地点Bに「(15)式の状態を作れ」と電話したとしても、単独で(15)式の状態になっているBしか作れず、(4)式のようにYともつれているBにはならない。このようなときも量子テレポーテーションを使えば量子もつれを保ったまま転送できるのである。

実用的な見地から言うと、量子暗号を100 kmよりずっと遠距離で行おうとすると、光ファイバーだろうが空間ビームだろうが大きな光損失が避けられないため、この量子テレポーテーションの世話にならなければならない(量子リピーター)。この場合、ベル状態にある光子ペアの配送が(光損失のため)失敗することは気にせず、成功するまで行い、成功したのを見届けてから最後にXを入力するというので、量子特有の脆弱性から重要な量子ビットXを守ることができる。これはXを入力してからそれをテレポートするという順序を逆転させて、「チャンネルを確立する」というサブルーチンを確保してからXを入力することができるからで、量子情報処理特有のことである。

一方、量子コンピューターへの応用を考えよう。これまでタスクは「単に量子状態を遠方に送る」と限定してきたが、実は「量子ビットXに量子コンピューティングの演算を施す」代わりに、ベル状態の片割れである量子ビットBに先に演算を施しておくと、BにテレポートされるのはXにその演算を施した状態となる。昨今C-NOTなどの重要な量子演算はなかなか確率1で成功させることができていないが、そんな状況でもBへの演算を成功するまで行い、成功してからXをテレポートすれば(確率が低くても)Xを失わずに済む。これもサブルーチンを先に行ってからそのサブルーチンへのXの入力を行うことができるという量子情報処理特有の特質が使われている。これを複雑化したのがクラスター状態を用いた一方向量子計算であり、この方面の研究は最近活発に行われている。

このように量子テレポーテーションを行うには事前準備としてベル状態の配布を必要とする。もし配布する量子ビットAとBの状態が完璧なベル状態でないとどうなるか？ もちろん量子テレポーテーションも完璧ではなくなる。ところがここに量子もつれの蒸留<sup>11)</sup>という方法がある。これは地点AとBに配布した粒子ペア  $A_1$  と  $B_1$ ,  $A_2$  と  $B_2$ ,  $A_3$  と  $B_3$ , ...,  $A_n$  と  $B_n$  が理想的ベル状態でなくても、地点AとBのLOCCだけで純粋なベルペアに蒸留することができるというものである。もちろんそのときペアの数は  $n$  より少ない  $m$  になる。量子もつれ蒸留は簡単な場合に実験も行われている。<sup>12)</sup> 特に量子もつれ劣化の原因が光通

信特有の「集团的ノイズ」と呼ばれる雑音であるとき、蒸留の方法は洗練されてきており、初期の実験<sup>13)</sup>から最新の改良提案<sup>14)</sup>まで研究が進んでいる。

## 6. 量子もつれの強さ

前節最後で「もつれ度合いの弱い $n$ 個のペアから純粋なベルペアを $m$ 個蒸留できる」と書いた。そうであるならば $m/n$  (これは1より小さい) を量子もつれの強さの指標とすることができそうである。 $n$ も $m$ も整数であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (m/n)$  のような漸近的定義をとる必要があるが、この定義による量子もつれ強度の指標を distillable entanglement (通常  $E_D$  と書かれる) と呼ぶ。つまり「その強度のペア1つから平均何個 (1より小さい) のベルペアが蒸留できるか」である。

一方、離れた系AとBに量子もつれを作るには LOCC だけではできないので量子通信—量子ビットを送ること—が必要である。そこで「そのペア1つを作るのに平均何個の量子ビット通信を必要とするか」(これも1より小さい) というのも量子もつれの強度を表す指標となる。これは entanglement cost と呼ばれ、通常  $E_C$  と書かれる。 $E_D$  も  $E_C$  も全系が混合状態でも成り立つ定義であるが、具体的計算法は与えていない概念的な定義である。

他方、第3節で「フォン・ノイマンエントロピーが量子もつれの強さの指標になり得る」と述べた。これは計算法が与えられている定義であるが、純粋状態の場合の話であった。純粋状態に限るとこれは entanglement of formation と呼ばれるものに一致し、それは通常  $E_F$  と書かれる。以上3つの指標には  $E_D \leq E_C \leq E_F$  の関係がある。

2体の2準位系 (2量子ビット系) に話を限ると、より計算法が具体的なコンカレンスという指標も用いられるが、これは  $E_F$  と関数関係にある。

このように量子もつれの強さを表す指標は種々提案されているが、これらに共通するのは「LOCCで量子もつれが増えることはない」という点である。あるいはこれが指標に要求される要請と言ってもよい。種々あっても2体系のようにもつれの大小関係を最大限に定量化するような指標の場合、最大もつれ状態は混合状態でなく純粋状態となっている。

以上のように量子もつれの強さを定量的に示す指標の他にも様々な見方がある。たとえば部分系の混合度の観点からは GHZ 状態の方が W 状態より量子もつれが強いわけであるが、逆に「粒子をひとつずつ失っていった場合に量子もつれがどのくらい残るか」という観点もある。GHZ 状態はたったひとつ失うだけで量子もつれが消滅するが、W 状態はいつまでも残る。それだけでなく、その減り方が最も遅い<sup>15)</sup>ので、粒子喪失に対する耐性が最大の状態とも言える。要はどの目的にも誰にも最適な指標がひとつあるのではなく、目的に応じて適切な概念なり指標なりを使うのである。

なお、量子もつれの詳細で優れた解説論文として文献16を挙げておく。

## 7. おわりに

量子もつれはベル不等式を破るための必要条件という重要性を有しているし、量子通信や量子コンピューティングに欠かせない基本技術である。そのような基本技術として使いたい場合、放っておくと環境との相互作用に対し脆弱な量子もつれを如何に忠実に形成し送り届け保持するかという問題がある。前述のようにこの方面の研究も盛んに行われているが、多数の弱い量子もつれ状態から少数の最大量子もつれ状態を蒸留する方法や集团的雑音に対して有効な雑音除去法などの研究が目覚ましく進んでいる。

一方、エンタングルメント・エントロピーはブラックホールのエントロピーと密接な関係があり、<sup>7)</sup>これが最近では物性物理へも広がってきている。<sup>17)</sup>たとえば相転移を表現するにはオーダーパラメーターに対する磁化などのマクロな量をプロットして、その変化が不連続あるいはなめらかでなく折れることを見るのが普通の方法であるが、これでは見えない相転移が量子もつれの強度をプロットすると見えてきたりする。このような新しい方向も含め、量子もつれの重要性和応用可能性は広がりかつ深まる一方である。深まっているとはいえ、これまで述べてきたように多体の多状態系の量子もつれの分類や指標など、未解決の問題も山積している。量子もつれそのものの研究も使い方の研究も、これから大いに発展していくことを期待したい。

## 参考文献

- 1) E. Schrödinger: Proc. of the Cambridge Philosophical Society **31** (1035) 555; *ibid.* **32** (1936) 446.
- 2) 井元信之: 数理科学 **49** (2011) 40.
- 3) (3)式は粒子AとBが同じ位置にあることを意味するので現代の実験状況と異なるように見えるが、次の文献4の(9)式の $X_0$ のような相対位置を組み込むと粒子AとBの相対位置が決まることになり、実験状況と合致する。
- 4) A. Einstein B. Podolsky and N. Rosen: Phys. Rev. **47** (1935) 777.
- 5) Greenberger, Horne, Zeilingerの頭文字をとってGHZ状態と呼ばれる。D. M. Greenberger, M. A. Horne and A. Zeilinger: *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, ed. M. Kafatos (Kluwer, Dordrecht, 1989) pp. 69–72; arXiv: 0712.0921.
- 6) パラメトリック下方変換でポンプ光が強い場合、光子ペアが1つだけでなく複数できる。その場合(12)式の左式の和の中にボルツマン因子がかかり、このとき規格化定数はカノニカル分布の分配関数の値となる。これは粒子-反粒子生成も同じである。このように現実の状態は常に規格化可能である。
- 7) たとえばブラックホールの傍で起こる粒子-反粒子生成において片方がブラックホールに吸い込まれた場合、外からはもう一方が放射されたように見える。その数分布がボルツマン因子に比例するため、それがブラックホールの温度とも関係するし、放射される粒子数のエントロピーはエンタングルメント・エントロピーに等しくなる。
- 8) A. Acin, D. Bruss, M. Lewenstein and A. Sanpera: Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 040401.
- 9) A. Miyake: Int. J. Quantum Information **2** (2004) 65.
- 10) C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters: Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1895.
- 11) C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher: Phys. Rev. A **53** (1996) 2046.
- 12) J-W. Pan, S. Gasparoni, R. Ursin, G. Weihs and A. Zeilinger: Nature **423**



(2003) 417.

- 13) T. Yamamoto, M. Koashi, S. K. Ozdemir and N. Imoto: Nature **421** (2003) 343.
- 14) H. Kumagai, T. Yamamoto, M. Koashi and N. Imoto: Phys. Rev. A **87** (2013) 052325.
- 15) M. Koashi, V. Buzek and N. Imoto: Phys. Rev. A **62** (2000) 050302.
- 16) R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki: Rev. Mod. Phys. **81**(2) (2009) 865.
- 17) 高柳 匡, 笠 真生: 日本物理学会誌 **62** (2007) 421; 高柳 匡, 西岡 辰磨, 笠 真生: 同 **69** (2014) 361; 古川俊輔, 白石潤一: 同 **69** (2014) 541.

## 著者紹介



井元信之氏: 東京大学大学院工学系研究科(物理工学)修了。NTT物性科学基礎研究所・総合研究大学院大学教授を経て現職。

(2014年6月19日原稿受付)

## Basics of Quantum Entanglement for Quantum Information and Physics

Nobuyuki Imoto

abstract: The basic concept of entanglement is introduced taking examples from the simplest two two-level systems to many multi-level systems. Related concepts are explained such as quantum teleportation, magnitude of entanglement, generation method, concentration of weakened entanglement, and also relationships between different areas such as information, communication, and condensed-matter physics are described.