トポロジカル秩序とベリー接続

初貝安弘 〈筑波大学大学院数理物質科学研究科　305-8571 つくば市天王台 1-1-1 〉

近年多くの興味を集めている量子液体相とは，量子効果によりすべての秩序が融解し，対称性の破れを伴わない物質相である．量子ホール効果における 2 次元電子系，整数スピン鎖，トポロジカル絶縁体がその典型例であり，その多くがバルクな系での励起に有限のエネルギーを必要とし，低エネルギーに特徴的な構造を持たない．一方で，これらの相では系の境界や不純物近傍にエッジ状態とよばれる局在状態が特徴的かつ必然的に現れ，このエッジ状態がバルクの非自明な性質を反映する．この相互関係はバルク-エッジ対応とよばれ，量子液体相の特徴付けにおけるその有効性が広く認識されつつある．また，バルクな系でも古典論を離れ，量子干渉効果であるベリー接続を用いてチャーン数，量子化ベリー位相等の「トポロジカルな秩序変数」を定義すれば，これらは励起にエネルギーギャップを持つ系の断熱不変量となり，相分類において有効である．これらに関する我々の試みに関して平易な解説を試みたい．

1. 量子液体相とトポロジカル秩序

物質の相を区別し理解することは物性物理学の基本的な目標であり，その際「秩序」の概念は重要である．磁性体の例をとれば，十分高温では熱揺らぎにより物質は全ての方向が対称な対称相にあるが，転移温度以下では揺らぎの減少に伴い秩序が形成され特定の方向が生まれる．このように，系の物理法則の持つ対称性を低温相が持たない場合，自発的に対称性が破れているといい，その破れ方が物質相を特徴付けると考えるのである．

この Ginzburg-Landau 以来のよく知られた相の理論ですべての物質相が理解できれば幸せであったが，1980 年代以降に歴史的な 2 つの例外が現れた．一つが半導体中の 2 次元電子系に強磁場を印加した際，ホール伝導度が e^2/h を単位に極めて高い精度で量子化する量子ホール相[1,2]であり，もう一つが低温でも磁気秩序が発達しないことを特徴とし，整数スピンからなる等方的な 1 次元反強磁性体で実現する Haldane 相である．[3,4] 共に対称性の破れを伴わず，それでいて多くの研究者を引きつける興味深い物質相である．その共通の特徴として励起に有限のエネルギーが必要であり，基底状態では，すべての相関関数が距離の関数として指数関数的に減衰する．よって，その基底状態は量子効果により古典的な秩序はすべて融解したどんな対称性も破らない相であり量子液体相またはスピン液体相とよばれる．新しい量子論的な物質相（量子相）の登場である．

この量子ホール相には整数，分数量子ホール相など階層構造をつくる多種多様なものがある．これらの相は全て励起には有限のエネルギーが必要であり，励起状態を記述する準粒子は分数電荷を持ち，さらにフェルミ統計でもボーズ統計でもない分数統計に従う等，極めてエキゾティックな相である．この分数電荷や統計パラメータは個々の相により異なる値をとり，どうやら多数の異なる相と見なすのが適当であろうと皆が考えるに至ったが，秩序変数がないのだから，秩序変数に基づく通常の相分類の理論は使えない．さて，どうしたものであろうか？

この問いに答えるのは少し保留して，量子液体相のもう一つの典型例である Haldane 相の歴史を振り返ろう．通常の局所秩序変数による相の理論によれば系が連続対称性のもとで不変であれば，基底状態がその連続対称性を自発的に破るとき，南部-ゴールドストン（NG）ボゾンとしてのギャップレスの励起が存在する．系のハミルトニアンは連続対称操作に対応するすべての「方向」を等価に表現するにも関わらず，実現する系の基底状態は無数の状態の中から唯一つだけを選んで実現する（図 1(a), (b)）．これが対称性の自発的破れである．ここで連続対称性の存在から対称性の破れの方向は連続に変形できることに留意し，自発的に選ばれた対称性の破れの方向を空間的に少しずつ周期的に変化させることで，外乱を導入しよう．この外乱の周期が長くなる，すなわち，ゆっくりした基底状態の変形を考えると外乱の影響はいくらでも小さくなるから，励起エネルギーはいくらでも小さくできると期待できる（図 1(c), (d)）．これが Lieb-Schultz-Mattis 流の NG モードに対応するギャップレスの励起である．[5,6] この励起は定性的にはスピン波に対応し，1 次元の厳密解の結果等もあり，1980 年代には，スピン空間で回転対称な量子スピン系では低エネルギーにはギャップレスのモードがあるのが普通であると考えられていた．

ところが Haldane は各量子スピンの大きさが（半奇整数でなく）整数の場合には，全く状況が異なり NG モードは存在せず励起にギャップがあることを主張した．[3,4] これがいわゆる Haldane Conjecture である．これは直ちに肯定的には受け入れられなかったようであるが，多くの研究，特に数値計算の結果，さらに決定的であったのは AKLT 模型とよばれる典型的な Haldane 相の可解模型[7]の発見により今日ではその正当性が広く信じられるに到っている．量子ホール相の発見と並ぶ新しい量子液体相の発見である．な

図 1　連続対称性の破れと考えられる励起状態．(a) 対称性の破れた基底状態の一例．(b) 別な方向に対称性の破れた基底状態．(c) 基底状態にゆっくりとした空間的に周期的な乱れを導入した状態．(d) もっとゆっくりとした乱れを導入した状態．

© 2013 日本物理学会

お，磁性体における量子液体相はスピン液体相とよばれる．

上述の励起状態に関する定性的な議論には少し論理に穴があるのである．[6] もちろん，この Haldane Conjecture は対称性の破れに伴う NG ボゾンの存在の議論と何ら矛盾するものではない．ギャップレスの NG ボゾンの存在は対称性の破れの存在を仮定して導かれた結論であったからその対偶である「ギャップがあれば連続対称性は破れていない」との主張も正しい．一方で，この Haldane 相の存在を知った上で考えると量子系の基底状態がいかなる連続対称性をも破らないとき，有限のギャップがあると期待することは自然である．しかし，ギャップレスの量子液体の存在は論理的には否定できず，ギャップレスの量子液体を追求する理論実験の多くの試みが興味深い所以でもある．[*1]

以上，ここで紹介した量子ホール相および Haldane 相はいわば現代物性物理学の玉手箱であり，これらの相を典型例として多くの量子論的な物質相が実験的ならびに理論的に開拓され，その存在が認識されてきた．整数−分数量子ホール相，AKLT 模型に代表されるいわゆる Valence Bond Solid（VBS）状態，ダイマー模型，近藤絶縁体，Kitaev 模型，Levin-Wen 模型等の基底状態がその例である．その過程で，トポロジカル項，分数電荷，分数統計，素粒子論のアノマリー等，物性論ではあまり使われたことのない概念が導入され物質相の理解のために用いられてきた．これらの各量子相および概念の詳しい内容にはここでは立ち入る時間はないが，量子液体/スピン液体の研究を通して物性物理学の様相が現代的に少しずつ変わってきたことを感じてもらえれば幸いである．

また，近年話題の量子スピンホール相は，スピン軌道相互作用に起因する磁場なしで実現する量子ホール相であるが，これもまた量子液体相の典型例である．[8,9] 通常の絶縁体と一見変わらない絶縁体相において，光電子分光にて直接観測される局在状態が表面に安定して存在することをもって（狭義の）トポロジカル絶縁体とよばれるのだが，[10–12] これは量子液体の理解において極めて教育的である．一見したところ，通常の絶縁体と変わらない，つまりバルクには観測にかかるような特徴的な構造がなにもないこと，これが対称性の破れを特徴としない物質相としての量子液体の最大の特徴である．更には表面の存在に伴って低エネルギーの局在状態が現れること，これは境界または不純物等の存在が，バルクには存在しなかった低エネルギー励起を誘起することを意味する．逆に，これらの事実，すなわち，バルクにギャップがあり，対称性の破れを伴わない系において，外乱等に対して安定な局在状態が境界に存在することをもってトポロジカルに非自明な量子液体相の定義とするのである．この対応関係を「バルク−エッジ対応」とよぶ．この「バルク−エッジ対応」は歴史的には量子ホール相の研究過程で発見され確立したものであるが，[13,14] 近年の多くの研究の結果，より広く多様な量子液体相においても普遍的に成立する事実であることが明らかとなったものである．

歴史をたどれば，量子ホール相を分類しようとする試みは X. G. Wen によるトポロジカル秩序の提案に遡る．[15] 通常の相転移の理論は局所揺らぎが大域化する過程を記述するために局所場の理論を用いるが，量子ホール相などの量子液体では低エネルギー励起が存在せず局所揺らぎは重要でない．そこで，物理系が住んでいる系のトポロジカルな形状に依存する新しい秩序をトポロジカル秩序という言葉でよんだ．具体的には量子ホール相の基底状態の縮退度が系のトポロジカルな形状に依存することに着目し，その非自明な縮退（トポロジカル縮退）の存在をもってトポロジカル秩序の定義とした．分数量子ホール系の基底状態はランダウ準位の占有率 $1/q$ の場合 2 次元周期的境界条件下，すなわちトーラス上では q 重に縮退するが，球面上では縮退しない．これがトポロジカル縮退の典型例である．この事実をもって，分数量子ホール相は非自明なトポロジカル秩序を持つと考えたのである．近年の量子液体相の理論において「トポロジカル秩序」とは一つの重要なキーワードであるが，誤解を恐れずあえていえば，現代のトポロジカル秩序とは万人の納得する確定した定義が存在するものではなく未だ発展途上の未定義の概念といえよう．[*2] Wen によれば多粒子状態を構成する粒子が踊り回るパターンがトポロジカル秩序であるとのことであるが，ここではもう少し気楽にトポロジカルな量を使って特徴付けられる物質相をトポロジカル秩序相とよぼう．以下説明する我々の近年の試みはこのいわば正体不明のトポロジカル秩序なる概念をもう少しわかりやすく，そして具体的に理解しようとするものである．

2. ベリー接続によるトポロジカルな秩序変数

2.1 成功の歴史からトポロジカルな秩序変数へ

量子液体の典型例が量子ホール相であり，その最も基本は整数量子ホール相である．2 次元電子系に一様な磁場を印加すると，系の一粒子エネルギー準位はよく知られたランダウ準位とよばれる等間隔のデルタ関数型の状態密度（ランダウ縮退）を持つものとなる．よって，多粒子系のフェルミ準位がランダウギャップ内にあるとき，系の励起には有限のエネルギーが必要である．まず，多電子系のホール伝導度 σ_{xy} に対する Niu-Thouless-Wu 流の以下の表式から議論をはじめたい．[16–18]

$$\sigma_{xy}=\frac{e^2}{h}C,\quad C=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{T^2}F,\quad F=\mathrm{d}A,\quad A=\langle G|\mathrm{d}G\rangle$$

ここで 2 次元系の x, y それぞれの方向に境界をまたぐとき，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^x}$ もしくは $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi^y}$ の位相が付加される「ひねった境界条件」

*1 繰り込まれたフェルミ液体がギャップレスの量子液体の具体例である．これは，フェルミ面のトポロジカルな安定性を示唆する．ただし，ギャップレスの量子液体の特徴付けは，本論が主に扱う励起エネルギー有限の量子液体相の場合よりも困難であると考えられる．

*2 もちろん物理としてはこの時代が楽しい．

© 2013 日本物理学会

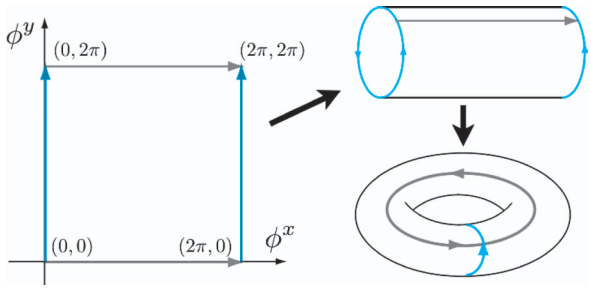


図2　2次元のひねり境界条件を記述するパラメータ空間 T^2.

を課した場合のハミルトニアンを $H(\phi)$，$\phi=(\phi^x,\phi^y)$ と書いて，パラメータ ϕ に依存する多粒子系の固有値問題 $H(\phi)|G(\phi)\rangle=E(\phi)|G(\phi)\rangle$ を考え，その基底状態の波動関数を $|G(\phi)\rangle$ とした．以下説明するように，この表式は σ_{xy} がトポロジカル不変量であるチャーン数 C で書けることを意味する．なお $|\mathrm{d}G\rangle=|\partial_\mu G\rangle\mathrm{d}\phi^\mu$ はひねり境界条件 ϕ^μ を少し変えた場合の基底状態の微小変化であり（$\partial_\mu=\partial/\partial\phi_\mu$，$\mu=x,y$ で和をとる），$A=\langle G|\mathrm{d}G\rangle$ はベリー接続とよばれる．[*3] なお一度微分して作った A（1-形式）をもう一度微分して $F=\mathrm{d}A$（2-形式）とし，それをひねり境界条件を指定するパラメータ空間である2次元トーラス T^2 上で積分したものが C である．ひねり境界条件としては，$\phi^\mu=0,2\pi$ を同一視するので (ϕ^x,ϕ^y) に関する2次元の面積分は図2のように境界のない2次元トーラス T^2 上の積分と考えられる．ベクトル解析的の記法で $\boldsymbol{A}=\langle G|\nabla G\rangle$ とすれば，チャーン数は以下のようにも書ける．

$$C=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{T^2}\mathrm{d}\phi^x\mathrm{d}\phi^y\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{T^2}\mathrm{d}\phi^x\mathrm{d}\phi^y\,(\langle\partial_x G|\partial_y G\rangle-\langle\partial_y G|\partial_x G\rangle)$$

次節で説明するように，ベリー接続 A は本質的に電磁気学におけるベクトルポテンシャルと同じ性質を持つ．チャーン数はベクトルポテンシャルの微分，すなわち，磁場を閉曲面上で積分したものなので，ディラック単磁極の量子化の議論と同様の議論ができて，チャーン数 C は整数値に量子化する．[19,20] 物理的には，基底状態からの励起ギャップが常に有限であれば，系に摂動が加わってもチャーン数は変化せず，整数値の断熱不変量となる．実験で観測された極めて高い精度のホール伝導度の量子化を，トポロジカル不変量の断熱不変性に帰するわけである．[16–18] 整数量子ホール相は量子液体相の典型例であり，いかなる対称性の破れも伴わず，励起にギャップを持つ相であるが，このチャーン数というトポロジカルな量でうまく特徴付けられるのである．抽象的で数学の概念であるチャーン数が，実はホール伝導度という学生実験でもしばしば登場する物理量そのものであったのだ．

[*3] ここでの $\mathrm{d}\phi^x$ 等は微分形式の記法であるが，あとで積分することまで念頭においた微小量と思って先に進もう．ただし向きのついた面の上で積分するので $\mathrm{d}\phi^x\mathrm{d}\phi^y=-\mathrm{d}\phi^y\mathrm{d}\phi^x$ と反可換であることには注意する．

この成功の歴史をふまえて，発想を逆に，一般の量子液体相，スピン液体相に対してベリー接続を作業変数として，トポロジカルな秩序変数を構成しようというのが，我々の提案の要点である．[21–23] ただし，ホール伝導度の例では，ひねり境界条件をパラメータとしてベリー接続を定義したが，一般のトポロジカルな秩序変数の構成に関しては，何を外部パラメータとするかは，個別の量子液体相に応じて個々に検討しなければならない．通常の相の理論において，何を秩序変数とするのかに対しては，一般論は無力であり個々の考察が本質的に重要であるのと同じである．その上で，一般論の意義は各論の有効性で判断されるわけである．なお，我々のベリー接続によるトポロジカルな秩序変数の具体例に関しては，次節以降でそのいくつかを述べる．

2.2　ベリー接続とゲージ構造

量子力学の教科書によれば，古典的な物理量はエルミート演算子 $\mathcal{O}$ に対応し，状態 $|G\rangle$ での観測値は $\langle\mathcal{O}\rangle_G=\langle G|\mathcal{O}|G\rangle$ となる．よく知られているように，この観測値は，状態の位相には無関係であり，状態を $|G_g\rangle=|G\rangle g$，$g=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（$\theta$ は実数）ととっても $\langle\mathcal{O}\rangle_{G_g}=\langle\mathcal{O}\rangle_G$ と不変である．しかし，量子論では，古典論では考えることのなかった2つの状態 $|G\rangle$，$|G'\rangle$ 間の量子干渉を表す重なり積分 $\langle G|G'\rangle$ も重要な物理量である．例えば，有名なアハロノフ・ボーム効果では，この種の干渉効果が直接観測されるとされている．なお，この重なり積分は $\langle G_g|G'_{g'}\rangle=\langle G|G'\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta'-\theta)}$，$(g'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'})$ のように状態の位相にあらわに依存する．規格化された状態 $|G\rangle$ と，それを少し変化させた状態との干渉効果を表す重なり積分は $\langle G|G+\delta G\rangle=1+\langle G|\delta G\rangle$ と書けるので，ベリー接続 $A=\langle G|\mathrm{d}G\rangle$ とは量子干渉を表現するものであることが，理解できよう．よって，ベリー接続は，量子干渉項なので，波動関数の位相変換に直接依存し，直接計算から，具体的に，次のように変換することとなる [20]

$$A_g=\langle G_g|\mathrm{d}G_g\rangle=g^{-1}Ag+g^{-1}\mathrm{d}g=A+\mathrm{i}\mathrm{d}\theta$$

A のこの変換則は電磁気学におけるゲージ変換と全く同じ形なので，これもゲージ変換とよばれる．一方 $\mathrm{d}^2\theta=(\partial^2\theta/\partial x\partial y)(\mathrm{d}\phi^x\mathrm{d}\phi^y+\mathrm{d}\phi^y\mathrm{d}\phi^x)=0$，ベクトル解析の記法では $\mathrm{rot}\,\nabla\theta=0$ であることに注意すれば $F_g=F$ であり，チャーン数に関しては $C_g=C$ となる．つまりチャーン数はゲージ不変である．

ここで，固有値問題 $H|G\rangle=E|G\rangle$ は斉次なので，固有ベクトル $|G\rangle$ の位相は，全くの任意であることに注意したい．微分を含むベリー接続の定義のためには，パラメータ空間でなめらかに波動関数の位相を定義すること，すなわち，なめらかなゲージ固定が必要である．[18,21,23] 一方，一般には，このなめらかなゲージ固定を妨げる特異点が存在し，これがチャーン数，ベリー位相などの非自明なトポロジカルな量の起源となる．[*4]

また，一般には基底状態近傍の状態は唯一とは限らず，パラメータ ϕ を変化させた際に，数本（M 本）のエネルギ

© 2013 日本物理学会

ー準位が絡まり合っていることもある．例えば，トーラス上占有率 $\nu = 1/q$ の Laughlin 状態（分数量子ホール相）においては，トポロジカル縮退に関連する $M = q$ 本が絡まり合う．このとき，個々のエネルギー準位のベリー接続は，隣接準位との準位交差点で特異となり，個々のエネルギー準位のチャーン数は well-defined でない．ただし，M 個のエネルギー準位をまとめて考えたとき，M 個の準位の上にエネルギーギャップが存在すれば，M 個まとめた多重項としてのベリー接続を考えることが有効であり，まとめて構成したベリー接続に対応するチャーン数は，well-defined となる．明示的には，M 個まとめた状態を $\psi = (|G_1\rangle, \cdots, |G_M\rangle)$ と書いて，行列としてのベリー接続（非可換ベリー接続）を

$$A = \psi^\dagger \mathrm{d}\psi = \begin{pmatrix} \langle G_1|\mathrm{d}G_1\rangle & \cdots & \langle G_1|\mathrm{d}G_M\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle G_M|\mathrm{d}G_1\rangle & \cdots & \langle G_M|\mathrm{d}G_M\rangle \end{pmatrix}$$

と定義する．[22, 25, 26] M 個の多重項を状態を混合する $U(M)$ のゲージ変換 $\psi_g = \psi g$, $g \in U(M)$ に関して A は 1 成分の場合と同じく（直接計算により）$A_g = g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g$ と変換する．よって，非可換ゲージ理論の一般論に従って $F = \mathrm{d}A + A^2$ と定義すれば，F の変換則は $F_g = g^{-1}Fg$ となることが，直接計算からわかる．[27] さらに，チャーン数を $C = (1/2\pi\mathrm{i})\int \mathrm{Tr}\, F$ とすれば，これはゲージ不変であり，well-defined な量となる．このときのホール伝導度は，トポロジカル縮退に伴う規格化因子 $1/M = 1/q$ を考慮にいれて $\sigma_{xy} = (e^2/h)(C/q)$ となる．これが分数量子ホール系のホール伝導度に関する Niu-Thouless-Wu 公式である．[16]

以上，非可換ベリー接続としての非可換ゲージ場を基底状態近傍の多重項構造から導入したが，非可換ゲージ場を考えることには，もう一つの大きな御利益がある．グラフェンの量子ホール効果においては，負エネルギーのディラックの海がつくる多数のランダウ準位を考えなければならず，[28, 29] 物理的に重要なフェルミ準位がゼロ近くの系において，ホール伝導度を考察するためには，フェルミ準位以下に極めて多数のランダウ準位が存在する場合を扱わなければならない．また，ランダム系における数値計算でも単位胞の増大に伴い，多数のランダウ準位を同時に考察することが必要となる．[30] このように，フェルミ準位以下に多数の一粒子エネルギー準位がある場合，上記の非可換ゲージ場を用いる形式は極めて有効となる．整数量子ホール相は自由粒子からなる多電子系であるから，多電子系の基底状態は，フェルミ準位以下の一粒子状態（ランダウ準位）をフェルミ準位まで詰めることで構成される．このとき，多電子系のベリー接続 A は，フェルミ準位以下の一粒子状態を全てまとめた一粒子多重項 $\psi = (|1\rangle, \cdots, |M\rangle)$ を用いて $A = \mathrm{Tr}\, a$, $a = \psi^\dagger \mathrm{d}\psi$ となる．よって，多電子系のチャーン数は $C = (1/2\pi\mathrm{i})\int_{T_2} \mathrm{Tr}\, a$ となるが，これはフェルミ準位以下の一粒子状態を混合するユニタリ変換（ゲージ変換）に対して不変であり，一粒子状態の準位交差に関して，何ら特異性を持たない．さらに，一粒子状態 j ごとのベリー接続を $a_j = \langle j|\mathrm{d}j\rangle$ として，一粒子状態のチャーン数を $C_j = (1/2\pi\mathrm{i})\int \mathrm{d}a_j$ と書けば，$C = \sum_j C_j$ となる（フェルミ準位以下の一粒子状態に関して和をとる）．整数量子ホール相のチャーン数はフェルミ準位以下の一粒子状態のチャーン数の総和で与えられるのである．これがホール伝導度のトポロジカルな意味をはじめて明らかにした歴史的な TKNN 公式とよばれる基本公式である．[17], *5 また，非可換ベリー接続による表式からは，チャーン数に関する総和則も自明となる．最後に，具体的なチャーン数の数値計算を行う際には，格子ゲージ理論で開発された位相不変量の計算法を用いることが，決定的に重要であることも指摘しておこう．[31]

2.3 対称性が保護する量子化

ベリー接続によるチャーン数は励起にギャップさえ存在すれば必ず整数となり断熱不変量となる．ただしパラメータ空間は 2 次元であることが必要であり，拡張して第 n チャーン数を考えても，パラメータ空間は必ず偶数次元である．では，最も簡単な 1 次元の（より広くは奇数次の）パラメータ空間からトポロジカルな秩序変数は作れないのであろうか？　もちろん，その候補は最も基本的なベリー位相

$$\mathrm{i}\gamma = \int_L A$$

である．[20] また高次のベリー位相も，電気磁気分極およびトポロジカル絶縁体等の議論では重要である．[9, 32, 24] ここで L はパラメータ空間の閉曲線である．以下，このベリー位相 γ を大域的なゲージ固定の下で計算することとする（脚注 4 に注意）．量子干渉効果である A は状態の位相に直接依存するので，ゲージ依存量であり，ゲージ変換の下での変換則は $\mathrm{i}\gamma_g = \mathrm{i}\gamma + \mathrm{i}\int \mathrm{d}\theta$ となり，ベリー位相も $\int \mathrm{d}\theta$ だけ，ゲージ変換で変化する．しかしこのゲージ依存部分は，ゲージの大域性から位相因子 $g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ がパラメータ空間で一価と考えられるので，$\int \mathrm{d}\theta$ は，常に 2π の整数倍となる．これはベリーによる断熱過程の解析で現れる位相変化 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ の一意性とも整合的である．つまり，ベリー位相はゲージ依存であるが 2π の整数倍の不定性を無視すれば確定するのである．これを $\gamma_g \equiv \gamma$, $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ と書こう．[23]

チャーン数と異なりベリー位相は 2π を法としても，一般には量子化せず，任意の実数値をとる．量子化しなければ，系の連続変形に伴い，その値も連続に変化するから，トポロジカル安定性を持たず断熱不変量にもなり得ない．しかし，興味ある多くの物理系は完全に任意ではなく，時間反転対称性のような何らかの対称性を持つことが多い．

*4 この特異点はある重なり積分 η がゼロとなることで指定され，$\mathrm{Re}\,\eta = \mathrm{Im}\,\eta = 0$ から定まる（余次元が 2）．よって，特異点は，2 次元のパラメータ空間では点，3 次元のパラメータ空間では曲線（ディラック・ストリング）となる．そのため，2 次元のパラメータ空間上では 1 次元積分で定まるベリー位相は，大域的なゲージにより計算可能であるが，2 次元積分が必要なチャーン数は，一般には大域的なゲージでは計算できない．[18, 19, 21, 24]

*5 ひねった境界条件に関する積分は本質的にブリルアンゾーン積分に還元できる．

© 2013 日本物理学会

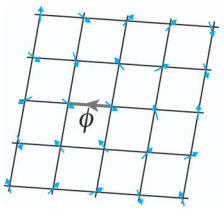
そこで系がある対称操作の下で不変であることを要求するとベリー位相は離散的な値に量子化する場合がある．これが，対称性が保護するベリー位相の量子化である．[23,24] 以下，一つの例として時間反転対称な場合を考察しよう．一般には，クラマース縮退する場合も重要であるが，[9,24] ここではスピン数が偶数の縮退のない場合を考えよう．よって系が時間反転操作Θの下で不変であれば唯一の基底状態$|G\rangle$に時間反転操作を行った$|G_\Theta\rangle=\Theta|G\rangle$もまた基底状態であるはずなので位相の自由度を考えて$g\in U(1)$として$|G_\Theta\rangle=|G\rangle g$と書ける．一方時間反転操作$\Theta$は，複素共役演算を含む反ユニタリ演算であることから$|G\rangle$と$|G_\Theta\rangle$のそれぞれが定義するベリー位相は符号が逆転する．よって$\gamma_G\equiv\gamma_{G_\Theta}=-\gamma_G\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$，これから$\gamma_G=0,\pi$となり，時間反転対称な系のベリー位相は，2つの異なる値しか取り得ない．これがベリー位相のZ_2量子化であり，この量子化したベリー位相をZ_2ベリー位相とよぼう．

大成功の歴史に裏付けられた対称性の破れの概念が使えない系として，量子液体相を特徴付けたにもかかわらず，対称性は再び物理を強く拘束し量子化という興味深い構造をもたらすのである．我々の物理は，かくも対称性に深く関わり，対称性はどこまでも我々の物理を豊かにするものであることに驚く．次節では，断熱不変量であるZ_2ベリー位相がトポロジカル秩序変数として，如何に有用であり，どのように量子液体相を区別するのかを，具体例に即して説明したい．

2.4　シングレット対が運ぶZ_2ベリー位相

高温超伝導体の理論は，物質の発見以来，20年たってもまだ結論に至らない難問であるが，Andersonのいわゆる RVB 理論によれば，ホールをドープした反強磁性体において重要なのは，個々のスピンではなくシングレット対であるとする．系の基底状態を個々のスピンから考えることをやめ，シングレット対の組み替えを多数考え，その重ね合わせにより波動関数を構成しようと考える．個々のスピンを基本的な構成単位とするのをやめて，シングレット対という簡単ではあるが量子的な構造を議論の出発点とするのである．このとき，系のスピン励起はシングレット対の局所的な破壊に伴うシングレットートリプレット励起からなりこの相はスピンギャップ有限のスピン液体となる．よって，この系を記述するには，局在した量子的な構造物としてのシングレット対を秩序変数とするのが適切であろう．では，どうやってシングレット対を特徴付けたら良いのであろうか？　シングレット対はその名の通りスピンゼロであるから外部磁場には反応しない．ないものは見えないわけである．しかし，その一方でシングレット対は，以下示すようにZ_2ベリー位相$\gamma=\pi$を運ぶ．つまりスピンを持たないシングレット対がベリー位相で見ると見えるのである．

まず，スピン 1/2 の2つのスピンを記述するハミルトニアン$H=2\boldsymbol{S}_A\cdot\boldsymbol{S}_B$を考えよう．この系の基底状態はシングレット対$(|\uparrow_A\downarrow_B\rangle-|\downarrow_A\uparrow_B\rangle)/\sqrt{2}$である．次にBサイトのみスピン空間で$z$軸周りに角度$\phi$だけ回転してひねったハミルトニアン$H(\phi)$を考えよう．



$$H(\phi)|G(\phi)\rangle=E(\phi)|G(\phi)\rangle$$
$$A=\langle G(\phi)|dG(\phi)\rangle$$
$$i\gamma=\int_L A$$

図3　特定のリンクの相互作用をϕだけひねることで周期的パラメータに依存する多スピン系のハミルトニアン$H(\phi)$を導入し，基底状態の波動関数$|\phi\rangle$が作るベリー位相γをトポロジカルな秩序変数とする．

$$H(\phi)=(S_A^x,S_A^y,S_A^z)\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & \\ \sin\phi & \cos\phi & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_B^x\\S_B^y\\S_B^z\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}S_A^+S_B^-+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\phi}S_A^-S_B^+)+S_A^zS_B^z$$

この系の基底状態は$|\phi\rangle$は適当に位相をとって，例えば$|\phi\rangle=(|\uparrow_A\downarrow_B\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}-|\downarrow_A\uparrow_B\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2})/\sqrt{2}$となる．この「適当に」とった位相を正しく確定する過程がゲージ固定である．[*6]

このゲージ固定の過程を，少し丁寧に書いてみよう．$|\phi\rangle$は位相の不定性を持つが，基底状態への射影演算子$P=|\phi\rangle\langle\phi|$はゲージによらず一意的である．次にゲージ固定のために用いる任意の状態を例えば$|1\rangle=|\uparrow_A\downarrow_B\rangle$と選び，これを用いてゲージ固定された基底状態の波動関数を次のようにとる．

$$|\phi\rangle_1=P|1\rangle/\sqrt{N_1}=(|\uparrow_A\downarrow_B\rangle-|\downarrow_A\uparrow_B\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})/\sqrt{2}$$

ここで$N_1=\langle 1|P|1\rangle=1/2$は規格化定数である．

時間反転操作に関してスピンは奇であるから，スピンの2次式で与えられるハミルトニアン$H(\phi)$は時間反転不変である．よって，この系のベリー位相はZ_2に量子化するはずである．実際，ここでゲージ固定した波動関数を使って，ベリー位相を計算すれば$\gamma=-\mathrm{i}\int_0^{2\pi}{}_1\langle\phi|\mathrm{d}/\mathrm{d}\phi|\phi\rangle_1\mathrm{d}\phi=\pi$となる．すなわちシングレット対は$Z_2$ベリー位相$\pi$を運ぶのである．

一般の多スピン系に対しては，図3のように局所的なスピンひねり加えたハミルトニアンに対して，多スピン系の基底状態の波動関数を使ってベリー接続を定義する．時間反転に対してスピン演算子は$\boldsymbol{S}_i\to-\boldsymbol{S}_i$と奇に変換するから，スピン系のハミルトニアンがスピン演算子について2次，例えばハイゼンベルグスピン系であれば，系のフラストレーションの有無によらず時間反転対称となる．よって対称性が保護するベリー位相は励起ギャップが有限である限りZ_2に量子化し，このZ_2ベリー位相をひねった場所に割り

[*6] この$|\phi\rangle$を用いて定義にしたがってベリー位相γを計算すれば，$\gamma=0$となるが，これは正しくない．この$|\phi\rangle$は$|\phi=0\rangle\neq|\phi=2\pi\rangle$であり，局所的には波動関数として用いられるが，パラメータ空間における一価性を満たさないから大域的にこの形を用いることはできない．本文で大域的にゲージ固定した波動関数は$|\phi=0\rangle_1=|\phi=2\pi\rangle_1$と一価である．

© 2013 日本物理学会

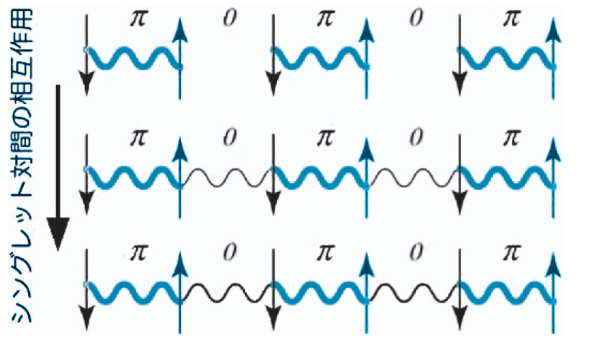


図4　Z_2ベリー位相のトポロジカル安定性を示す思考実験．（フルカラー口絵参照．）

当てることで，局所的なトポロジカルな秩序変数の定義とする．これを，局所的なZ_2秩序変数とよぼう．ひねりを加える場所を変えZ_2ベリー位相の計算を繰り返すことで，全ての相互作用リンクに，このZ_2秩序変数を割り当てるのである．なお量子ホール系の場合は，境界条件という大域的なパラメタに対するベリー接続がチャーン数という大域的なトポロジカル秩序変数を定義し，これが系を特徴付けたと考えるのである．[22)]

この局所Z_2秩序変数の多スピン系での物理的意義を例を用いて説明しよう．まず思考実験としてシングレット対を図4のように鎖状に並べ，次に孤立したシングレット対間に交換相互作用を徐々に導入することを考える．シングレット対の間の相互作用が完全に切れているときには，シングレット対のある場所のZ_2秩序変数は（2スピン系のベリー位相そのものだから）πである．一方，切れているところをひねって作ったベリー位相は（切れてるのだからひねっても何の影響も受けないから）0である．つまり，多スピン系の波動関数が定義するZ_2秩序変数はπ, 0, π, 0, …となる．このベリー位相は，常に量子化しているからシングレット対間の相互作用を徐々に増加させてもエネルギーギャップが閉じない限り変化し得ず，Z_2秩序変数のパターンも不変である．さらに，無限小の結合で有限のエネルギーギャップがつぶれることはないから，相図上少なくとも有限の領域において0, π, 0, π, …といった交代的なZ_2秩序変数がダイマー状態を特徴付けることになる．また，反強磁性−強磁性といった空間的に符号が変化する交換相互作用の場合にも数値計算の結果によれば，ギャップがつぶれない限りシングレット対のZ_2秩序変数はπ，それ以外の強磁性的なリンクのZ_2秩序変数は0となる．[33)]

この模型の強磁性相互作用に関する強結合極限は，Hidaの研究にあるようにスピン1のハイゼンベルグ鎖となるので，[34)] Haldane相は一様で並進対称なZ_2秩序変数πで記述されることになる（図5）．次に，少し拡張した$S=1$の次のハミルトニアン$H=J\sum_i \boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}+D\sum_i S_i^2$を考えると，その基底状態は$D\approx 0$のとき，Haldane相であり$D\gg J>0$であれば，各サイトのスピン状態が本質的に$S_i^z=0$の積で与えられるLarge D相が基底状態となることが知られている．

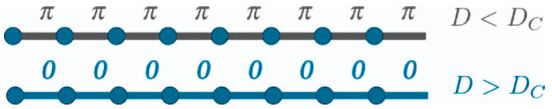


図5　$S=1$のハイゼンベルグ鎖におけるベリー位相によるトポロジカルなZ_2秩序変数．$D=D_C$は量子臨界点．（フルカラー口絵参照．）

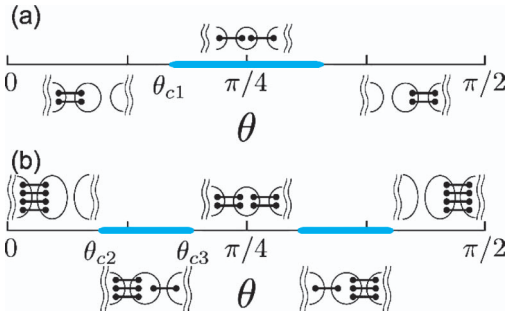


図6　整数スピン鎖における，逐次ダイマリゼーション転移のZ_2秩序変数による相図．（a）$S=1$, 14サイト．（b）$S=2$, 10サイト．ともに周期的境界条件を課した．[35)] 青線はZ_2ベリー位相が並進対称でπの相．

この系でのZ_2秩序変数の数値計算によれば，このLarge D相においてはZ_2秩序変数は至る所ゼロとなる．[23, 33, 35)] すなわち，このZ_2秩序変数はHaldane相−Large D相間の量子相転移を記述するトポロジカルな秩序変数である（図5）．また，整数スピン鎖においては交代鎖における交換相互作用の比を変化させることによりダイマリゼーションに関する逐次型の量子相転移がおきることが予言されているが，[36, 37)] 実際の$S=1, 2$の整数スピン鎖において，Z_2秩序変数の数値計算を行うと，図6にあるような相図が得られる．ここで，整数スピン鎖ではZ_2秩序変数は常に並進対称であることに注意し，[35)] 一次元鎖のハミルトニアンを$H=J_e\sum_{i:\mathrm{even}}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}+J_o\sum_{i:\mathrm{odd}}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}$と書き$J_e=\cos\theta$, $J_o=\sin\theta$としてθ: $0\to\pi/2$に対してZ_2秩序変数がπとなる相を青で示した．この図から見て取れるように，このZ_2秩序変数はダイマリゼーション逐次転移を明確に記述するのである．なお，図に併記した概念図はHaldane相に対するAKLT模型[7)]の拡張として，整数スピンを複数の$S=1/2$スピン間のフント結合により表現し，反強磁性結合を複数のシングレット対により概念的に示したものである．反強磁性結合が強いほど多くのシングレット対がそのボンドに多く存在すると仮定した．この表現によれば，シングレット対一つあたりZ_2ベリー位相πを運ぶと考えると，全体の相図が整合的に理解できる（$2\pi\equiv 0$とする）．[35)] さらに，AKLT模型を拡張した1次元の可解模型においてはZ_2秩序変数は解析的に計算可能であり，その結果もまた，シングレット対あたりのベリー位相の値がπとなる解釈と整合する．[35)] この結果は整数スピン鎖においても，物理的にはスピン1/2の分数スピンがつくるシングレット対が重要であることを示唆しており，その意味でZ_2秩序変数は整数スピン鎖における分数化を記述することになる．なお，この

© 2013 日本物理学会

我々のZ_2秩序変数による分類は，最近の他の手法による1次元系の研究とも関連が深い.[38–40]

ここでは，一次元整数スピン鎖を例にとり，トポロジカルなZ_2秩序変数の有効性を紹介したが，基底状態が唯一に確定し励起ギャップが有限である限り，次元によらず，このZ_2秩序変数は定義可能である．ただし，何を周期的パラメータとしてZ_2ベリー位相（Z_2秩序変数）を定義するかは，前にも述べたように，各論の問題であり，問題に応じて適切に設定する必要がある．具体的には，2次元ランダムホッピング系,[23,33] 2次元VBS固体相[23,33] 1次元t-J模型,[41] はしごスピン鎖,[33,42,43] 2次元直交ダイマー系,[44] 超伝導におけるBEC-BCSクロスオーバー現象,[45] 等に関してZ_2秩序変数の計算が行われ，その相分類における有効性が確認されている．なお，計算には有限系の対角化が必要であるが，Z_2ベリー位相等の量子化する物理量を計算する際には，ギャップの存在に確証が持てる程度の大きさまで計算すればよく，無限体積極限への外挿等は不要で，数値的には極めて確定しやすい．また，相互作用を断熱的に導入するとき，絶縁相の励起ギャップは安定と考えられるから，自由フェルミ粒子系に対して得られたトポロジカル秩序変数は，電子相関の存在下でも，相互作用が弱い限り有限の相互作用の値まで不変である．これは整数量子ホール相の相互作用に対する安定性の根拠でもある．例えば，最近ある種のd次元フェルミ粒子系に対してベリー位相の量子化を保護する対称性を時間反転対称性以外に拡張することによりZ_Q（$Q=d+1$）ベリー位相によるトポロジカルな秩序変数，すなわち$\gamma=2\pi n/Q$, $n=0, 1, 2, \cdots, Q-1$, (mod 2π) が，定義されたが,[46] その結果は，相互作用の存在下においても弱結合である限り不変である．なお，この系は2次元カゴメ格子ならびに3次元パイロクロア格子上の電子系を含み，励起ギャップ有限のフラストレートした電子系の典型例である．このZ_Q秩序変数はフラストレートした電子系における一般化したダイマリゼーション転移をトポロジカルに記述するものである．

3. バルク–エッジ対応

前節では，量子ホール相ならびに励起ギャップが有限の量子液体の幾つかの例に対して，Z_2ベリー接続によるトポロジカルな秩序変数の相分類に関する有効性を紹介した．一方，現実の問題としては，このZ_2ベリー位相によるトポロジカルな秩序変数の実験的な観測は，量子論的な多体の波動関数の位相の制御が必要であり，可能ではあるものの，多粒子系の量子計算と同様の困難さがあると推測される．では，トポロジカル相に関する実験的に観測しやすい，もっと直接的な物理量はないのであろうか？

はじめに紹介した量子ホール相，トポロジカル絶縁体での例を思い出せば，系に境界があるときに，はじめて現れたエッジ状態の存在そのものをもって，トポロジカルな相は特徴付けられていると考えればよいのである．バルクな量子液体相にはギャップがあり低エネルギー励起は存在しない．いわば打てども響かずというわけで，バルクな系は，外界からの微小な摂動には応答しない．一方，境界や不純物など，バルクな系に対して，構造としての外乱が存在すると，その外乱の近傍に，エッジ状態とよばれる特徴的な低エネルギー励起が生まれ，それがトポロジカルな相を特徴付けるのである．この相互関係が「バルク–エッジ対応」である．この対応は量子ホール相における厳密な関係の発見に基づき[13,14] トポロジカル絶縁体等，種々の具体的な物理系での整合性等を基礎にその有効性が帰納的に理解されて来たものである．熱力学的極限の下で，示量的な物理量を主たる考察の対象する通常の相の理論では，バルクと比して次元の低い境界近傍の寄与は，常に無視できることを思い起こすとき，トポロジカルな量子液体相では，境界の物理においてのみ特徴が現れることは，示唆的である．バルクな系における多体問題の励起ギャップを，トポロジカルな真空と考えると，境界の存在や不純物等によりギャップ内に生まれる局所的な低エネルギー励起（エッジ状態）は，ある種の粒子である．この粒子が真空を特徴付け，その一方で，真空がそこに生まれる粒子の特性を規定するのである．これが「バルク–エッジ対応」の物理的内容である.[*7] 励起ギャップ有限の真空は実験的に記述するのが困難であるが，粒子，すなわち，エッジ状態は実験的に検出可能である．バルク–エッジ対応に従うエッジ状態はバルクの非自明な構造を反映する観測可能なトポロジカルな秩序変数である．最初にも紹介したが，近年話題の3次元のトポロジカル絶縁体の研究においては，その表面状態が作る2次元の質量のないディラック粒子を確認することで，3次元相がトポロジカルに非自明であるとするわけで，まさに現代的なバルク–エッジ対応の有用な使い方といえよう.[*8]

ここでは，古きを訪ねて新しきを知るの例のごとく，バルク–エッジ対応の成立が厳密に示せる量子ホール相での議論を紹介し，一般のバルク–エッジ対応の理解の助けとしたい．古典的には，一様磁場下の荷電粒子は円運動するが，バルクな系では隣接する円運動からの電流は打ち消され，境界でのみ一方向に電流が流れる．この一方向の電流を作る状態を量子化したものがエッジ状態であり，そのエネルギーはランダウギャップ内に存在する．整数量子ホール効果の原理的な理解はLaughlinによる図7のようなシリンダー上でのゲージ変換の議論にはじまるが,[47] HalperinはLaughlinの議論におけるエッジ状態の物理的な意義を明らかとした.[48]

一方，トポロジカルな観点からは，前節でバルクのホール伝導度に関するホール伝導度のチャーン数による表式を

[*7] 次元の異なるところからみて新しい観点が得られるわけで，いわゆるholographic principleとの類似性も指摘しておこう.
[*8] 格子ゲージ理論におけるDomain wall fermionの3次元での対応物をトポロジカル絶縁体では実験的に観測しているのである.

© 2013 日本物理学会

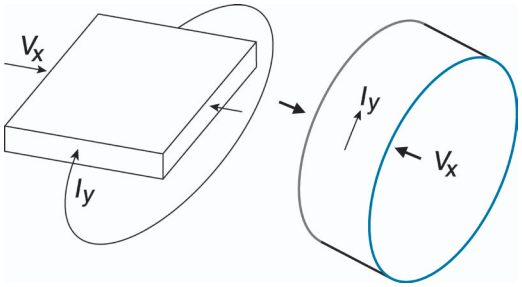


図7　2次元電子系とLaughlinの議論の舞台であるシリンダー．

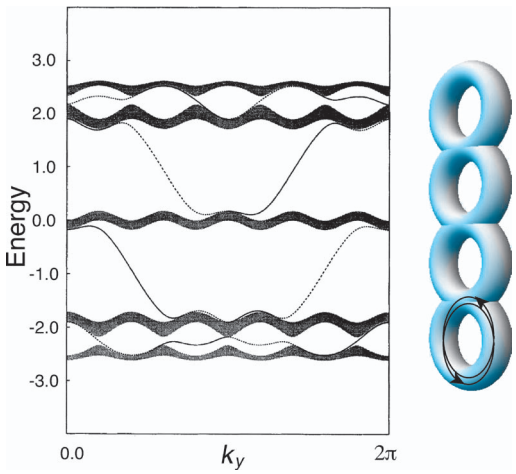


図8　エッジ状態とその複素エネルギー面の概念図．左図における網掛部分がランダウ準位に対応するエネルギーバンドであり，実線もしくは破線はエッジ状態のエネルギーである（実線がシリンダー上左端に局在，破線が右端に局在）．右図は，各k_yごとの複素エネルギー面である浮き輪である．その穴の数はエネルギーギャップの数に等しく，破線または実線であるエッジ状態のエネルギーは，浮き輪上で定義されるのブロッホ関数のギャップ内でのゼロ点に対応する．シリンダー方向の波数k_yを0から2πまで変化させることで，浮き輪上で，エッジ状態のエネルギーはギャップに対応する「穴」の周りで閉曲線を作る．Laughlinの議論によれば，フェルミ準位が存在するギャップ周りのこの閉曲線の回転数がホール伝導度となる．[13] 例えば，図の下から第一番目のギャップにフェルミ準位がある場合，エッジ状態のエネルギーは，最低エネルギーのギャップに対応する穴の周りを2回回転し，ホール伝導度は，向きも考えて$2(e^2/h)$となる．

紹介したが，実は，このエッジ状態によるホール伝導度に対しても全く異なるトポロジカルな表式を与えることができる．[13] ここでは，詳細は紹介する余裕がないが，その概要をここで述べよう．2次元格子上の電子系に一様磁場を印加した際の電子状態を明らかとすることはHofstadterの問題とよばれるが，これをシリンダー上で考えるとき「バルク-エッジ対応」が厳密に導かれる．まずシリンダーの円周方向の波数k_yごとに2次元系を分解することで，系を波数k_yをパラメータとする1次元系の集合と見なす．格子あたりの磁束が，磁束単位でp/q，（p, qは互いに素な整数）であるとき，波数をパラメータとして指定される1次元系は，周期qを持つ．よって，ブロッホの定理によりエネルギーバンドはランダウ準位に対応するq個に分裂する．なお，バンドギャップはエネルギーバンドの総数より1少ない$g=q-1$個ある．適切な境界条件の下で考えるとk_yごとの1次元系の束縛状態，すなわちエッジ状態は，各波数ごとにバンドギャップの中に一つだけ，そして必ず一つは存在することが示せる．

例として，図8に波数k_yごとの1次元系のエネルギーバンドを網掛の領域で示し，ギャップ内のエッジ状態のエネルギーを実線もしくは破線で示した．一般に，束縛状態（エッジ状態）と散乱状態（バルクのブロッホ状態）を統一的に議論するためには，複素エネルギーを導入することが有用である．[*9] このHofstadterの問題の複素エネルギー面は，ギャップの数gを種数とするリーマン面（穴がg個あいた浮き輪）であり，エッジ状態のエネルギーは，この複素エネルギー面上のブロッホ関数の零点で与えられる．ここで考える一次元系が，波数k_yに関して周期的であることに注意すれば，波数をk_yを0から2πまで変化させるとき，このg人乗りの浮き輪上にギャップの数だけあるエッジ状態を指定する零点は，閉曲線をつくり，g個の穴の周りを，それぞれ，I_j回まわることになる（$j=1, \cdots, g$）．ここで複素エネルギー面上の位置が，エッジ状態が波動関数が左右いずれの境界に局在しているかを表現することに注意してLaughlinの議論を用いるとフェルミエネルギーが下からj番目のエネルギーギャップにあるときのホール伝導度は以下のようになる[13]

$$\sigma_{xy}^{\mathrm{edge}} = \frac{e^2}{h} I_j$$

つまり，複素エネルギー面上でエッジ状態がつくる閉曲線の「穴」の周りの回転数I_jが，物理的にはe^2/hを単位としてのホール伝導度を与えるのである．この回転数はギャップがつぶれない限りトポロジカルに不変である．

続いて，少し丁寧な議論をすれば，エッジ状態によるトポロジカル数I_jとバルクのトポロジカル数であるチャーン数の間に次のような明示的な関係があることを示すことができる．[14] 具体的にはj番目のランダウ準位に対応するエネルギーバンドのチャーン数をC_jとして

$$C_j = I_j - I_{j-1} : \text{バルク-エッジ対応}$$

となる（$I_0=0$）．

物理的には，エッジ状態がバルクのエネルギーバンドと縮退するとき，ベリー接続のゲージ固定を妨げる特異点となり，これがバルクのホール伝導度を与える非自明なチャーン数に寄与するのである．よって，量子ホール系においては，バルクの物理が境界周りに誘起される局在したエッジ状態の振る舞いを規定し，逆に，エッジ状態の物理は，トポロジカルに非自明なバルクの電子状態を支配する．これが，量子ホール相におけるバルク-エッジ対応である．トポロジカルに非自明な系においては，バルクとエッジは独立ではあり得ず，相互に規定しあう．量子ホール相では，このバルクエッジ対応が，2種類のトポロジカル数の間の関係として明示的に書き下せるのである．

[*9] 量子力学において正のエネルギーを持つ平面波（散乱状態）を考え，そのエネルギーを複素平面上の実軸負の領域まで解析接続することで束縛状態を議論することの一般化である．

© 2013 日本物理学会

ここで，「バルク–エッジ対応」で解釈可能な非自明な局在状態の存在する量子液体相をもって広義のトポロジカル絶縁体とよぶことにしよう．このように視点を広げることで，量子ホール相の他に非常に多種多様な量子液体相をトポロジカル絶縁体として，普遍的な観点から議論することが可能となる．紙面に余裕がないので，ここでは「バルク–エッジ対応」の観点から理解することができる種々の局在状態の例を列挙して，この節を終わろう．

- 異方的超伝導体の Andreev 局在状態と Majorana fermion.[8, 9, 49–52), *10]
- ポリアセチレンのソリトン.[53)]
- グラフェン Zigzag 端の藤田状態.[54, 51)]
- フォトニック結晶におけるカイラルな局在モード.[55–57)]
- 冷却原子系における人工擬似磁場とエッジ状態.[58, 59)]
- 半導体における分極と表面電荷.[60, 61)]
- Haldane 系における不純物状態としてのエッジ状態[62, 63)]ならびにエンタングルメントエントロピー.[35, 64)]

これらの例からバルク–エッジ対応の普遍性の一端を感じていただければ幸いである．

4. おわりに

以上，「ベリー接続を用いたトポロジカルな断熱不変量」と「バルク–エッジ対応」という 2 つの新しい道具を用いて，対称性の破れを伴わない量子液体相を理解しようという，我々の試みを本解説では紹介してきた．多電子系がつくるベリー接続のゲージ構造は量子液体相のトポロジカルに非自明な構造を記述する．一方，バルク–エッジ対応とは，一種の積分定理であり，微積分学の基本定理 $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = F(b) - F(a)$，$F'(x) = f(x)$ の量子液体相での類似物である．定積分がバルクの物理量であり，境界値がエッジ状態である．バルクのトポロジカルな性質（積分値）は多電子系の状態（関数）の微細な振る舞いには依存せずエッジ状態（境界値）のみで定まるのである．

近年「トポロジカル」という少々きわどいキーワードもいつのまにか物性物理においてかなりの市民権を得てきたようである．紙面も尽きたのでトポロジカルな物性論の今後の大発展を期待しつつ，ここで筆をおきたい．

最後に青木秀夫，X.-G. Wen，丸山　勲，桂　法称，福井隆裕，河原林透，新井正男ならびに多くの共同研究者の方々には，関連の話題をいろいろご議論いただいたことをここに感謝したい．

参考文献

1）K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper: Phys. Rev. Lett. **45**（1980）494.
2）R. B. Laughlin: Phys. Rev. Lett. **50**（1983）1395.
3）F. D. M. Haldane: Phys. Lett. A **93**（1983）464.
4）勝又紘一，田崎晴明：『物理学論文選集 8; Haldane Gap—スピン系におけるマクロな量子現象』（日本物理学会，1997）.
5）E. H. Lieb, T. D. Schultz and D. C. Mattis: Ann. Phys.（N.Y.）**16**（1961）407.
6）I. Affleck and E. H. Lieb: Lett. Math. Phys. **12**（1986）57.
7）I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb and H. Tasaki: Phys. Rev. Lett. **59**（1987）799.
8）M. Z. Hasan and C. L. Kane: Rev. Mod. Phys. **82**（2010）3045.
9）X.-L. Qi and S.-C. Zhang: Rev. Mod. Phys. **83**（2011）1057.
10）D. Hsieh, *et al.*: Science **323**（2009）919.
11）A. Nishide, *et al.*: Phys. Rev. B **81**（2010）041309.
12）K. Kuroda, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **105**（2010）076802.
13）Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **48**（1993）11851.
14）Y. Hatsugai: Phys. Rev. Lett. **71**（1993）3697.
15）X. G. Wen: Phys. Rev. B **40**（1989）7387.
16）Q. Niu, D. J. Thouless and Y. S. Wu: Phys. Rev. B **31**（1985）3372.
17）D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale and M. den Nijs: Phys. Rev. Lett. **49**（1982）405.
18）M. Kohmoto: Ann. Phys.（N.Y.）**160**（1985）355.
19）T. T. Wu and C. N. Yang: Phys. Rev. D **12**（1975）3845.
20）M. V. Berry: Proc. R. Soc. A **392**（1984）45.
21）Y. Hatsugai: J. Phys. Soc. Jpn. **73**（2004）2604.
22）Y. Hatsugai: J. Phys. Soc. Jpn. **74**（2005）1374.
23）Y. Hatsugai: J. Phys. Soc. Jpn. **75**（2006）123601.
24）Y. Hatsugai: New J. Phys. **12**（2010）065004.
25）F. Wilczek and A. Zee: Phys. Rev. Lett. **52**（1984）2111.
26）Y. Hatsugai, S. Ryu and M. Kohmoto: Phys. Rev. B **70**（2004）054502.
27）T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson: Phys. Rep. **66**（1980）213.
28）Y. Hatsugai, T. Fukui and H. Aoki: Phys. Rev. B **74**（2006）205414.
29）M. Arai and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **79**（2009）075429.
30）T. Kawarabayashi, Y. Hatsugai and H. Aoki: Phys. Rev. Lett. **103**（2009）156804.
31）T. Fukui, Y. Hatsugai and H. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **74**（2005）1674.
32）A. M. Essin, J. E. Moore and D. Vanderbilt: Phys. Rev. Lett. **102**（2009）146805.
33）Y. Hatsugai: J. Phys. Condens. Matter **19**（2007）145209.
34）K. Hida: Phys. Rev. B **45**（1992）2207.
35）T. Hirano, H. Katsura and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **77**（2008）094431; *ibid.* **78**（2008）054431.
36）I. Affleck and F. D. M. Haldane: Phys. Rev. B **36**（1987）5291.
37）M. Oshikawa: J. Phys. Condens. Matter **4**（1992）7469.
38）X. Chen, Z.-C. Gu and X.-G. Wen: Phys. Rev. B **83**（2011）035107.
39）L. Fidkowski and A. Kitaev: Phys. Rev. B **83**（2011）075103.
40）F. Pollmann, E. Berg, A. M. Turner and M. Oshikawa: Phys. Rev. B **85**（2012）075125.
41）I. Maruyama and Y. Hatsugai: J. Phys. Soc. Jpn. **76**（2007）113601.
42）I. Maruyama, T. Hirano and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **79**（2009）115107.
43）M. Arikawa, S. Tanaya, I. Maruyama and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **79**（2009）205107.
44）I. Maruyama, S. Tanaya, M. Arikawa and Y. Hatsugai: J. Phys. Conf. Ser. **320**（2011）012019.
45）M. Arikawa, I. Maruyama and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **82**（2010）073105.
46）Y. Hatsugai and I. Maruyama: EPL **95**（2011）20003.
47）R. B. Laughlin: Phys. Rev. B **23**（1981）5632.
48）B. I. Halperin: Phys. Rev. B **25**（1982）2185.
49）C. Hu: Phys. Rev. Lett. **72**（1994）1526.
50）Y. Tanaka and S. Kashiwaya: Phys. Rev. Lett. **74**（1995）3451.
51）S. Ryu and Y. Hatsugai: Phys. Rev. Lett. **89**（2002）077002.
52）Y. Tanaka, M. Sato and N. Nagaosa: J. Phys. Soc. Jpn. **81**（2012）011013.
53）W. P. Su, J. R. Schriefer and A. J. Heeger: Phys. Rev. Lett. **42**（1979）1698.
54）M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada and K. Kusakabe: J. Phys. Soc. Jpn. **65**（1996）1920.
55）Z. Wang, J. D. Joannopoulos Y. D. Chong and M. Soljacic: Phys. Rev. Lett. **100**（2008）013905.
56）F. D. M. Haldane and S. Raghu: Phys. Rev. Lett. **100**（2008）013904.
57）M. Hafeze, E. A. Demler, M. D. Lukin and J. M. Tayler: Nature Phys. **7**（2011）907.
58）V. W. Scarola and S. D. Sarma: Phys. Rev. Lett. **98**（2007）210403.
59）N. Goldman, J. Beugnon and F. Gerbier: Phys. Rev. Lett. **108**（2012）255303.

*10 超伝導相を広義とはいえ絶縁体に分類することはお許し願いたい．

© 2013 日本物理学会

60）R. D. King-Smith and D. Vanderbilt: Phys. Rev. B **47**（1993）1651.
61）R. Resta: Rev. Mod. Phys. **66**（1994）899.
62）T. Kennedy: J. Phys. Condens. Matter **2**（1990）5737.
63）M. Hagiwara, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **65**（1990）3181.
64）H. Katsura, T. Hirano and Y. Hatsugai: Phys. Rev. B **76**（2007）012401.

著者紹介

初貝安弘氏：　物性理論，広義の電子論，トポロジカルな量子相の理論.

（2011年9月5日原稿受付）

Topological Order and Berry Connection

Yasuhiro Hatsugai

abstract:　Characterization of quatum/spin liquids without any fundamental symmetry breaking is one of the focuses of modern condensed matter physics. Quantum Hall states, the Haldane spin chains and the topological insulators are typical examples. They are gapped as bulk but do have low energy modes as edge states with boundaries. This bulk-edge correspondence is characteristic to the topological quantum liquids. Also for gapped quantum liquids, topological order parameters are defined by adiabatic invariants such as the quantized Berry phases and the Chern numbers using the Berry connection of the many body wave function. We give a compact introduction of our related works.

© 2013 日本物理学会